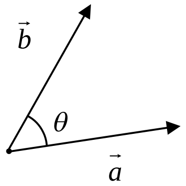
ベクトルの内積　フローチャート

ベクトルの内積

ベクトルの内積とは，図形の長さや角をベクトルで表現するためのものとして考えればよい。

長さや角度を求めるならば、内積を利用すると良い。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$



（$\vec{a}$ または $\vec{b}$ が $\vec{0}$ に等しいときは、なす角は定義しないが，内積は 0 と考える。）

また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ と成分表示されたときは，$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

なす角を求める

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ （なす角（の余弦）のベクトルによる表現）からなす角を求めることが可能。

図形問題において $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を考えるときは，$\left|\vec{a}\right|$，$\left|\vec{b}\right|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値がわかるかどうかを一度考えてみるとよい。

垂直（直交）条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は垂直である（直交する）という。それは内積によって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と表現することができる。

ベクトルの問題，図形の問題を解くにあたって，『垂直，直交』という考え方が必要なときは，ベクトルの内積を利用すると考えやすい。

長さを求める

$\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$（長さのベクトルによる表現）が得られる（なす角 0° ゆえ）。

↓

一般に，1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

自身の内積を取れば、長さが求まる。

$\vec{a}\cdot\vec{a}\left(=\left|\vec{a}\right|^2\right)$　　$\vec{b}\cdot\vec{b}\left(=\left|\vec{b}\right|^2\right)$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

の値さえわかっていれば，$\vec{x} = k\vec{a} + l\vec{b}$ と表される平面上の任意のベクトルの長さは，

$$
\begin{aligned}
\left|k\vec{a}+l\vec{b}\right|^2 &= \left(k\vec{a}+l\vec{b}\right)\cdot\left(k\vec{a}+l\vec{b}\right) \\
&= k^2\vec{a}\cdot\vec{a} + 2kl\vec{a}\cdot\vec{b} + l^2\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= k^2\left|\vec{a}\right|^2 + 2kl\vec{a}\cdot\vec{b} + l^2\left|\vec{b}\right|^2
\end{aligned}
$$

つまり、、

$\left|\vec{a}\right|, \left|\vec{b}\right|, \left|k\vec{a}+l\vec{b}\right|, \vec{a}\cdot\vec{b}$

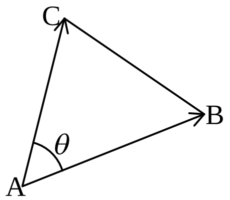
の 4 つは常に相互の関係をもつと覚えよう。

から求めることができる。

（注）上の特別な場合である $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$ は余弦定理とみることができる。

ベクトルにおいては，余弦定理は機械的な計算で得られるものになってしまうのである。

三角形の面積



左図において，△ABC の面積 S は

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}}$$

である。

★この公式は空間図形（空間ベクトル）を考える際にも使えるので、必ず 100％覚えておこう。