空間ベクトル　フローチャート

1.　空間ベクトルの考え方

　空間内においても，ベクトルの考え方は同じである。というか，ベクトルの考え方は次元によらないのである。ひとつ次元が上がっただけで，平面で述べたことは空間内でも同じように成り立つ。同一直線上の 3 点は、実数倍表現できるし、線分 AB の分点の位置ベクトルに関しては，全く同様に表すことができる。また，成分表示はもうひとつ成分が増えるだけである。もちろん，内積も平面ベクトルのときと同じ考え方ができる。
以下では平面ベクトルの考え方を，空間のベクトルにあてはめたときに注意しておきたい 2 つの性質について述べる。

2.　空間ベクトルの 1 次独立性

　空間内で，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が四面体をつくるような 3 つのベクトルであるとき，空間内のどんなベクトル $\vec{x}$ も

$$\vec{x}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}\quad (k,\ l,\ m \text{ は実数})$$

の形に表すことができ，その表し方はただ 1 通りである。このことから，とくに

$$\underline{k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k=0 \text{ かつ } l=0 \text{ かつ } m=0}$$

あるいは，これと同値な

$$\underline{k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=k'\vec{a}+l'\vec{b}+m'\vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad k=k' \text{ かつ } l=l' \text{ かつ } m=m'}$$

が得られる。（つまり係数比較ができる！）
これが成り立つような $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は（空間で）**1 次独立**であるという。

（注）空間内で，三角形をつくる 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，

$$k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0 \text{ かつ } l=0$$

が成り立つが，このとき，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ はやはり，1 次独立であるという。
空間内では，3 個までの 1 次独立なベクトルがとれる。

3.　共面条件

　同一直線上にない 3 点 A，B，C で決まる平面上の点 P について，この点 P が平面 ABC 上にある条件式を考えてみよう。

点 P が平面 ABC 上にあるとき，平面ベクトルの考え方から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ （s , t は実数）

で表すことができる。これを平面外の点 O からの位置ベクトルで表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで$1-s-t=r$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad , \quad r+s+t=1}$$

という条件をみたす。これは点 P が同一直線上にない 3 点 A，B，C で決まる平面上にある為の条件式であり，これを一般的に共面条件と言う。

※ベクトル的には，空間内において，平面上の直線に相当するものが『平面』ということである。
　これは，同一直線上にない 3 点 A，B，C で決まる平面上にある点 P の位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad , \quad r+s+t=1$$

で表されることからも実感できる。

《重要》
点 P が平面 ABC 上にあるときの条件式は

① $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （s , t は実数）

② $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad , \quad r+s+t=1$

のどちらかを利用して考える。