三角関数（2）　フローチャート

三角関数の加法定理

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

上の定理から、次のような公式を導ける！！

★2 倍角の公式

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \qquad\quad = 2\cos^2\theta - 1 \\ \qquad\quad = 1 - 2\sin^2\theta \\ \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases}$$

★半角の公式

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2} \\ \sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2} \\ \tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \end{cases}$$

★3 倍角の公式

$$\begin{cases} \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \end{cases}$$

※ sin と cos 、符号の入れ替えをしたものが他方になる。

ちなみに、α は下図の単位円上の点 P のみたす角である。

★三角関数の合成

一般に、 $a\sin\theta + b\cos\theta$ は、

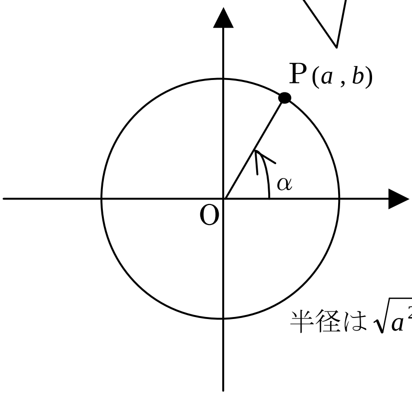
$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

と変形できるので、

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha\ ,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$$

とおくと、

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = \boxed{\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$



半径は $\sqrt{a^2+b^2}$

【発展】和⇒積、積⇒和の公式（利用例）

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

（左辺）→（右辺）：和⇒積

（右辺）→（左辺）：積⇒和

（例）和⇒積

$\sin 3x + \sin 5x$ は、

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 3x \\ \alpha-\beta = 5x \end{cases}$$

を解くと、$\alpha = 4x$，$\beta = -x$

αとβの値を求める。

求めたら上の式に代入するだけ。

$$\begin{aligned} \therefore \sin 3x + \sin 5x &= 2\sin 4x\cos(-x) \\ &= 2\sin 4x\cos x \end{aligned}$$

（例）積⇒和

$\sin 4x\cos x$ は、$\alpha = 4x$，$\beta = x$ より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 5x \\ \alpha-\beta = 3x \end{cases}$$

$$\therefore \sin 4x\cos x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

引き算をやると

$\sin\alpha\sin\beta$ の和⇔積となる。

（例）和⇒積

$\cos 3x + \cos 5x$ は、

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 3x \\ \alpha-\beta = 5x \end{cases}$$

を解くと、$\alpha = 4x$，$\beta = -x$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 3x + \cos 5x &= 2\cos 4x\cos(-x) \\ &= 2\cos 4x\cos x \end{aligned}$$

（例）積⇒和

$\cos 4x\cos x$ は、$\alpha = 4x$，$\beta = x$ より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 5x \\ \alpha-\beta = 3x \end{cases}$$

$$\therefore \cos 4x\cos x = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)$$

★ 和⇒積、積⇒和の変形は、公式の暗記も大事であるが、sin の加法定理と、cos の加法定理の和または差を取ればすぐに計算が出来ることはしっかりおぼえておこう。