

軌跡と領域 フローチャート

軌跡

条件をみたす点 P の全体を集めたときにできる図形を点 P の軌跡という。



点 P の軌跡が表す図形を解釈する方法として、方程式で解釈する方法がある。



点 P を $P(x, y)$ とおき、条件をみたす x, y の方程式を作り上げればよい。

(例) $P(x, y)$ が方程式

$$x^2 + y^2 = 4$$

をみたすのならば、中心が原点、半径 2 の円を描くことがわかる。

《代表的な点の軌跡》

- ① 2 定点 A, B から等距離である点 P の軌跡
→ 線分 AB の垂直 2 等分線を描く
- ② 2 定点 A, B からの距離の比が $m : n$ ($m \neq n$) である点 P の軌跡
→ 線分 AB を $m : n$ に内分、外分する 2 点を C, D としたとき、CD を直径とする円を描く。(アポロニウスの円)
- ③ $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ で表される場合、 x は t で表せるので、 t が存在すればそれに対応する x がある。
 $y = g(t)$ に代入して条件をみたす x, y の方程式を作ればよい。

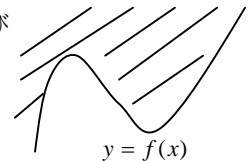
領域

不等式 $f(x, y) \geq 0$ をみたす点 $P(x, y)$ を集めたときにできる図形を不等式のみたす領域という。



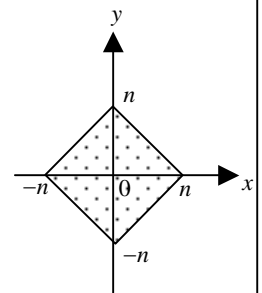
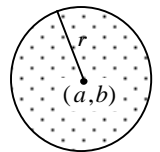
領域は、不等式の【視覚化】と考えることもできる。つまり、不等式をみたす (x, y) がどんなものか分からないときに、目で見て確認することができる一つの道具である。

(例) $y \geq f(x)$ をみたす点 $P(x, y)$ の領域は $y = f(x)$ の上部及び境界である。



《代表的な不等式の表す領域》

- ① $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ ($r > 0$)
がみたす領域は 中心が (a, b) 、半径 r の円の内部及び円周である。
- ② $f(x, y) \cdot g(x, y) > 0$ をみたす領域は $\begin{cases} f(x, y) > 0 \\ g(x, y) > 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(x, y) < 0 \\ g(x, y) < 0 \end{cases}$ をみたす領域である。
- ③ $|x| + |y| \leq n$ ($n > 0$)
がみたす領域は、4 点 $(n, 0), (0, n), (-n, 0), (0, -n)$ で作る正方形の内部及び周である。



【軌跡・領域の代表的な応用《重要》】

① 点 $P(x+y, xy)$ のみたす軌跡や領域 (x, y は実数)

→ $x+y=u, xy=v$ とおき、点 (u,v) のみたす方程式や不等式を考えればよい。

↓

ただし、この際 x, y は2次方程式

重要！！

$$X^2 - uX + v = 0$$

のみたす2解であるので、 x, y は実数である以上、判別式 $D \geq 0$ をみたさなければならない。

つまり、『 $u^2 - 4v \geq 0$ 』も条件になることを忘れないこと。

② x, y が「不等式※」をみたすときに、 $g(x,y)$ のとりうる値の範囲を考える (線形計画法)

→ $g(x,y) = k$ とおく。

↓

条件の「不等式※」をみたす (x,y) は領域を書いて目で確認する。

↓

このとき、 $g(x,y) = k$ の方程式をみたす図形も書いて同様に視覚化する。

↓

「不等式※」で表す領域と $g(x,y) = k$ で表す図形が共有点をもつ範囲で k が存在する。

これより k のとりうる範囲を考えて、それが $g(x,y)$ のとりうる値の範囲である。

③ 方程式 $f(x,y,a) = 0$ (a は定数) の表す図形において、

定数 a が変化するとき

$f(x,y,a) = 0$ が掃く領域 (通過領域) を考える。

→ a の方程式に変形する。...①

色々な方法があるけど。
代表的な方法の一つだよ。

↓

$(x,y) = (\alpha, \beta)$ を①に代入したとき、①をみたす a が存在すれば、 $(x,y) = (\alpha, \beta)$ である点は掃く (通過) 領域をみたす点のうちの一つである。

⇓

①の方程式をみたす a が存在するような (x,y) を考えれば、このような (x,y) をすべて集めたものが、定数 a が変化するとき $f(x,y,a) = 0$ が掃く領域 (通過領域) となる。