$\boxed{\text{高次方程式と複素数}}$　フローチャート

$f(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるとき、 $f(\alpha)=0$ （剰余の定理）

↓

$f(\alpha)=0$ であるとき、 $f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる（因数定理）

つまり、 $f(\alpha)=0$ であるとき、 $x-\alpha$ は $f(x)$ の因数である。

一般に、高次方程式（3 次以上の方程式）は、高校数学の範囲での解の公式はない。

因数分解をして解くのが基本である。

因数定理は強力な武器である。

$f(x)=0$ を解くには

① $f(\alpha)=0$ となる α を見つける

② $f(x)$ を $x-\alpha$ で割る

ことで因数分解できる。

※相反方程式：

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ は

①両辺を x^2 で割る

② $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ で式をまとめて、おきかえしてから解く。

実数係数の 3 次方程式　$ax^3+bx^2+cx+d=0$　の解

有理数解 α は、必ず

$$\alpha=\pm\frac{d\text{の約数}}{a\text{の約数}}$$

である。

虚数解 $\alpha+\beta i$ を解にもつならば、

$\alpha-\beta i$ も必ず解である。

（3 次以上の方程式でも成立）

α， β， γ を解に持つとき

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}\ ,\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

が成り立つ。

$\alpha+\beta+\gamma=s$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=t$, $\alpha\beta\gamma=\ell$ をみたす α,β,γ は

$x^3-sx^2+tx-\ell=0$ の解である。

複素数の性質

a,b は実数とする。

複素数　$z=a+bi$　において、

①$\overline{z}=a-bi$ を共役の複素数という。

②$b=0$ のとき、z は実数である。

③$b\neq 0$ のとき、z は虚数である。（大小概念はない）

とくに、$a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき、z を純虚数という。

一般に、共役の複素数との関係は

$z+\overline{z}=2a$

$z\overline{z}=a^2+b^2$

と必ず実数になる。

※実数化するなら、共役をかければよい！

さらに

$z=\overline{z}\cdots z$ は実数

$z=-\overline{z}\cdots z$ は純虚数

《注目》

※ $x^2+x+1=0$ の解ωの性質

$x^2+x+1=0$ の解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ は、どちらをωとおいても

$$\begin{cases} ①\ \omega^3=1 \\ ②\ \omega^2+\omega+1=0 \\ ③\ \omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega} \end{cases}$$

をみたす性質がある。これを使って計算することが多い。

（例）$\omega^{10}+\omega^8+\omega^9=\omega^{9+1}+\omega^{6+2}+\omega^9=\omega+\omega^2+1=0\ (\because ②)$

$x^2+x+1=0$ の解が絡むのであれば、①～③をフル活用しよう。