等差数列・等比数列　フローチャート

ある一定の規則でならんでいる，番号つけられた数の列のことを**数列**という。
その中で，はじめから数えて n 番目の数を表したものを（つまり第 n 項のことを）
一般項とよび，数列に番号をはじめから a_1，a_2，$a_3\ldots$ とつけたときの a_n にあたる。

隣り合う 2 項の差がいつも一定である数列を**等差数列**，隣り合う 2 項の比が一定である数列を**等比数列**という。

1.　等差数列の一般項

等差数列は，差が一定な数列であるので，その一定の差を d（公差とよぶ）とすると，

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + 3d$

・

・

・

a，b，c と連続して並んでいる等差数列は
差 $b-a$ と $c-b$ が等しいので
$b-a = c-b \Leftrightarrow \boxed{2b = a + c}$ が成り立つ。

等差数列の第 n 項目 a_n は，a_1 に n－1 個の d を加えればよいので，

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

となる。これが等差数列の一般項である。

$$\boxed{\text{等差数列の一般項：}\ a_n = a_1 + (n-1)\,d}$$

2.　等差数列の和の公式

等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を考えてみよう。（$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n$）

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ \cdot\cdot\cdot\ + \{a_1 + (n-3)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-1)d\}$$

逆から書いて

$$S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \ \cdot\cdot\cdot\ + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

ここで，この 2 式の和をとると

$$2S_n = \underbrace{\{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdot\cdot\cdot + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\}}_{\{2a_1 + (n-1)d\}\text{ が } n\text{ 個}}$$

$$\therefore\quad \boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}}$$

また，$2a_1+(n-1)d=a_1+\{a_1+(n-1)d\}=a_1+a_n$ より

初項から第 n 項までの和 S_n の公式は

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d\}$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

（$S_n=\dfrac{\text{項数}}{2}$（初項＋末項）でおぼえてもよい）

3.　等比数列の一般項

等比数列は，比が一定な数列であるので，その一定の比を r（公比とよぶ）とすると，

$a_2=a_1r$

$a_3=a_1r^2$

$a_4=a_1r^3$

・

・

a，b，c（$ac\geqq 0$）と連続して並んでいる等比数列は

比 $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{c}{b}$ が等しいので、$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}\Leftrightarrow \boxed{b^2=ac}$

が成り立つ。

等比数列の第 n 項目 a_n は，a_1 に $n－1$ 個の r をかければよいので，

$a_n=a_1r^{n-1}$

となる。これが等差数列の一般項である。

等比数列の一般項：$a_n=a_1r^{n-1}$

4.　等比数列の和の公式

等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を考えてみよう。

$$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdot\cdot\cdot+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$$

両辺に r をかけて，差をとると

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdot\cdot\cdot+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1} \\ rS_n &=& \quad\;\; a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdot\cdot\cdot+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}+a_1r^n \quad (- \\ \hline (1-r)S_n &=& a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a_1r^n \end{array}$$

よって，$r\neq 1$ であるとき，$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ と書ける。

また，$r=1$ のとき，$S_n=a_1+a_1+a_1+a_1+\cdot\cdot\cdot+a_1+a_1=na_1$ であるので，

$r\neq 1$ であるとき，$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ であるとき，$S_n=na_1$

等比数列の和は，$r\neq 1$ と $r=1$ と<u>必ず分けて考える</u>必要があることがわかる。