$\boxed{\text{色々な数列}}$　フローチャート

1.　和の記号Σ

数列の和　$a_1+a_2+a_3+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}+a_n$　についてもう一度考えてみよう…
この式は，

『数列 $\{a_k\}$ の，$k=1$ から $k=n$ までの和』

というように考えることができる。

ここでこの【 $k=1$ から $k=n$ までの和】を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ と書くことにすると，

$$a_1+a_2+a_3+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

つまりΣは，数列の和を簡潔に表記する為の物である。

たとえば数列 $\{a_k\}$ の第1項～第10項までの和であれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$ のように書ける。

また，k ではなく，他の文字（添え字）を用いて表してもよい，つまり

$$\text{数列 }\{a_k\}\text{ の第1項～第10項までの和}=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{j=1}^{10}a_j=\sum_{m=1}^{10}a_m=\sum_{\ell=1}^{10}a_\ell=\cdots$$

と書いても，本質は変わらない。

↓

※$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}+a_n$ であるので，Σを考えるとき，わかりづらかったら一度 $a_1+a_2+a_3+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}+a_n$ と書き出してみるとわかりやすい。

（例1）数列 $\{b_k\}$ の第1項～第12項までの和＝$\displaystyle\sum_{k=1}^{12}b_k$

（例2）数列 $\{a_k\}$ の第1項～第 $n-1$ 項までの和＝$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

（例3）数列 $\{a_n\}$ が，第 k 項 $a_k=k^2$ であるとき，

$$\text{数列 }\{a_n\}\text{ の第1項～第 }n\text{ 項までの和}=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdot\cdot\cdot+(n-1)^2+n^2$$

（例4）数列 $\{a_k\}$ が等比数列であるとき，

$$\text{数列 }\{a_k\}\text{ の第1項～第 }n\text{ 項までの和}=\sum_{k=1}^{n}a_k=\text{（等比数列の第1項～第 }n\text{ 項までの和）}$$

2.　Σの性質（計算法則）

一般にΣを使うとき，以下の計算法則が成り立つ

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$　，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}a_k$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \times b_k) \neq \sum_{k=1}^{n}a_k \times \sum_{k=1}^{n}b_k$ …Σの分配は成り立たない！

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \neq \frac{\sum_{k=1}^{n}b_k}{\sum_{k=1}^{n}a_k}$ …Σの分配法則は成り立たない！

とくにこの２つ
は要注意！！

3.　Σの計算公式

基本公式

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_1 r^{k-1}=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$　$(r \neq 1)$

↑ $a_k = a_1 r^{k-1}$ は等比数列より，等比数列の和の公式をそのまま利用。

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c = nc$ （n 個の c の和）

↑ $k=1,2,\cdot\cdot\cdot,n$ に関係なく，常に $a_k = c$ であるため。

便利公式

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+3+\cdot\cdot\cdot+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$　（自然数の和）

↑ $a_k = k$ は初項 1，公比 1 の等差数列の和より，等差数列の和の公式を用いた。

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdot\cdot\cdot+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

↑ $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^3-k^3\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)$ を利用して導ける。

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdot\cdot\cdot+(n-1)^3+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

↑②と同じ，$(k+1)^4-k^4$ の恒等式を利用して導ける。

4. Σの計算例

それでは実際にΣの式を計算してみよう。

$Point$ 1) （数列 $\{a_n\}$ の第 1 項～第 n 項までの和）$= \sum_{k=1}^{n} a_k$

第 k 項 a_k の式を作っておこう！

$Point$ 2) Σの計算法則に従い，Σの分配ができるものとできないないもの，Σの変数は何かをしっかりと見極めること。

$Point$ 3) 計算するにあたって，基本公式，便利公式があてはまるものはそのまま公式を代入してよい。公式があてはまらないものは書き出して考える。

例 1） 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 ,・・・である数列の第 1 項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

＜解＞1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 ,・・・ $= 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 , 6^2$,・・・

より，第 k 項 $a_k = k^2$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

例 2） $\sum_{k=1}^{n}(k+3)$ を求めよ。

＜解＞ $\sum_{k=1}^{n}(k+3) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n^2 + n + 6n}{2} = \frac{n(n+7)}{2}$$

（例 3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ を求めよ。

＜解＞

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = &\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)\\
&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\
&\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\
&\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \ (+\\
\hline
&\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

あてはまる公式が
ないので，書き出し
て考えてみた。

例 4） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right\}$ を求めよ。

＜解＞ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}\right\}$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\
&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})\\
&\quad(\sqrt{3}-\sqrt{2})\\
&\quad(\sqrt{4}-\sqrt{3})\\
&\qquad\cdot\\
&\qquad\cdot\\
&\quad(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \quad (+\\
\hline
&\quad\sqrt{n+1}-1
\end{aligned}
$$

あてはまる公式がないの
で，書き出して考えよう
としたが，引き算の形に
直してからの和を計算し
てみた。

※例 3 と例 4 をみるとわかるように，公式が当てはまらない場合は，「差形の数列の和」を作ると計算ができることが多い。公式が使えないときは差形に直してみよう。

５． 和と一般項の関係

数列の和　$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdot\cdot\cdot + a_{n-1} + a_n$　について，一般項 a_n との関係を考えよう。

（$n \geqq 2$ のとき）

$$\begin{array}{rl} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdot\cdot\cdot + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdot\cdot\cdot + a_{n-1} \qquad (- \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_n \end{array}$$

と，$a_n = S_n - S_{n-1}$ が成り立つことがわかる。

また、S_1 とは第 1 項から第 1 項までの和，即ち第 1 項そのものなので，$a_1 = S_1$ である。

$$\boxed{\begin{array}{l} ★\ a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2) \\ \quad a_1 = S_1 \end{array}}$$

（例）$S_n = n^2 + n + 1$ で与えられているとき，一般項 a_n を求めよ。

＜解＞$S_n = n^2 + n + 1$ より，$S_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 1 = n^2 - n + 1$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1) = 2n$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$，これは $n \geqq 2$ の式に適しない。

$$\therefore \quad \begin{cases} a_n = 2n \ \ (n \geqq 2) \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

６．{(等差) × (等比)} 数列の和

（例）$1\cdot1 + 2\cdot3 + 3\cdot3^2 + 4\cdot3^3 + 5\cdot3^4 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + n\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

（考え方）各項の左側の数字は 1,2,3,⋯の等差数列，右側の数字は $1, 3, 3^2, 3^3, \cdots$ の等比数列であるので，{(等差) × (等比)} 数列の形である。等差数列と等比数列を含むので，この 2 つの数列における和の公式の求め方を利用して考えてみることにする。等差数列のやり方ではうまく考えられないので，等比数列のやり方で考えてみる。

＜解＞　$S_n = 1\cdot1 + 2\cdot3 + 3\cdot3^2 + 4\cdot3^3 + 5\cdot3^4 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + n\cdot3^{n-1}$

等比数列の公比 3 を両辺にかけて，2 式の差をとると

$$\begin{array}{rl} S_n &= 1\cdot1 + 2\cdot3 + 3\cdot3^2 + 4\cdot3^3 + 5\cdot3^4 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + n\cdot3^{n-1} \\ 3S_n &= \qquad 1\cdot3 + 2\cdot3^2 + 3\cdot3^3 + 4\cdot3^4 + 5\cdot3^5 + \cdot\cdot\cdot + (n-1)\cdot3^{n-1} + n\cdot3^n \ (- \\ \hline -2S_n &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \cdot\cdot\cdot + 3^{n-1} - n\cdot3^n \end{array}$$

よって　$-2S_n = \dfrac{1\cdot(3^n - 1)}{3-1} - n\cdot3^n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \dfrac{1}{4}\left\{3^n(2n-1) + 1\right\}$ と求まる。

等比数列における和の公式の導入と同じ考え方で求めることができる

７． 階差数列（の利用）

数列$\{a_n\}$を見たとき，法則性がなかなか見当たらないときがある。このとき，各隣接する項の差をとってみると，法則性が見つかるような数列がある。ここでこの

「各隣接する項の差を並べた数列を階差数列」

と言い，$\{b_n\}$と書くことにする。
このとき，数列$\{a_n\}$の一般項a_nを，階差数列の一般項b_nを使って考えることができる。

$$
\begin{aligned}
&a_2 - a_1 = b_1\\
&a_3 - a_2 = b_2\\
&a_4 - a_3 = b_3\\
&a_5 - a_4 = b_4\\
&\quad\vdots\\
&a_n - a_{n-1} = b_{n-1}
\end{aligned}
$$

であるので，これらの和をとると

$$
\begin{aligned}
&\cancel{a_2} - a_1 = b_1\\
&\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = b_2\\
&\cancel{a_4} - \cancel{a_3} = b_3\\
&\cancel{a_5} - \cancel{a_4} = b_4\\
&\quad\vdots\\
&a_n - \cancel{a_{n-1}} = b_{n-1} \quad (+\\
\hline
&a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{n-1}
\end{aligned}
$$

と，左辺のa_1を右辺に移項し，Σを使って書くと，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$と書けることがわかる。

導入の段階を見てもわかるように，$\sum_{k=1}^{n-1} b_k$は$n \geqq 2$でしか意味をなさない。

★ $n \geqq 2$のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

　$n = 1$のとき　$a_n = a_1$

である。