漸化式　フローチャート

1．そもそも漸化式とは…

さて、次のような数列の一般項を考えてみよう。

1, 3, 7, 15, 31, 63, …

この数列の法則性は、『等差数列・等比数列』のどれでもないですね・・・

ここで、ちょっとおもしろい見方をしてみよう。この数列は

$1,\quad 2\cdot1+1,\quad 2\cdot3+1,\quad 2\cdot7+1,\quad 2\cdot15+1,\quad 2\cdot31+1,\quad \cdots$

のように書くことができますね。つまり

$a_2 = 2a_1 + 1$
$a_3 = 2a_2 + 1$
$a_4 = 2a_3 + 1$
$a_5 = 2a_4 + 1$
・
・

という法則にしたがっていることが見える。
これから、隣り合う2項の関係に法則性があることがわかる。式にすると

$$\boxed{a_{n+1} = 2a_n + 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad ・・・(※)}$$

という形で書けることが分かるであろう。

一般に、(※) で書かれているのような式のことを「隣接2項間の漸化式」という。上の説明からも分かるように、隣接2項間の漸化式はあくまで「隣り合う2項の関係の法則」を説明した式に過ぎないのだ。

しかし、もしこの「隣接2項間の漸化式」から与えられた数列の全体の法則性を読み取ることができたり、または計算して a_n を求めることができれば、漸化式は数列の一般項を考えるにあたっての非常に有効な【道具】となる。なぜなら、全体を見なくても、隣り合う（2 項の）関係の法則を見るだけで一気に a_n が求まるからだ。

２．漸化式から a_n を求めてみよう

$\boxed{\text{基本形}}$　　（$n=1,2,3,\cdots$ とする）

$a_{n+1}=a_n+d$ ・・・ a_n は公差 d の「等差数列」である。←$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$

$a_{n+1}=ra_n$ 　・・・ a_n は公比 r の「等比数列」である。←$\boxed{a_n=a_1r^{n-1}}$

$a_{n+1}=a_n+b_n$ ・・・「階差数列の一般項が b_n」の数列 $\{a_n\}$ である。

$a_{n+1}-a_n=b_n$ 　より、$a_n=a_1+\sum_{n=1}^{n-1}b_k\ (n\geqq 2)$ で求めればよい。

上にある３つの漸化式で表される数列は、一般項の公式を知っているので、基本形と考えよう。<u>これは逆に言うと、どんな漸化式で表された数列も、この基本形に変形ができれば、一般項がすぐに求まるということである。</u>ここから先、この基本形への変形方法について考えていくことにする。ちなみに、この基本形の中で「等比数列」が一番形がシンプルである。$a_{n+1}=ra_n$ の形に直してみることにしよう。

$\boxed{★\ a_{n+1}=pa_n+q\ \ (p\neq 1, q\neq 0)\text{ の漸化式}}$

↓

定数 q を分解して、$a_{n+1}=pa_n+q$ を『$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$』の形に変形できれば、

$a_2-\alpha=p(a_1-\alpha)$
$a_3-\alpha=p(a_2-\alpha)$
$a_4-\alpha=p(a_3-\alpha)$
・
・

となるので、

$$a_1-\alpha\ ,\ \xrightarrow{p}\ a_2-\alpha\ ,\ \xrightarrow{p}\ a_3-\alpha\ ,\ \xrightarrow{p}\ a_4-\alpha\ ,\ \xrightarrow{p}\ \cdots$$

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$、公比 p の等比数列となるので、一般項が立てられる。

『$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$』をみたす α の求め方：

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=pa_n+q \\ -) & \ \ \alpha\ \ \ =p\alpha\ +q \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \end{array}$$

この式をみたす α が存在すれば、
$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ に変形できる。
この式のことを<u>特性方程式</u>という。
したがって、まずはこの式を解いて、
α を求めておこう。

（例）$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

＜解＞

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{n+1}=2a_n+1 \\
-) & \alpha=2\alpha+1 \cdots ① \\
\hline
 & a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha) \cdots ②
\end{array}
$$

①より、$\alpha=-1$ が求まるので、②に代入すると

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

より、数列 $\{a_n+1\}$ は、初項 $a_1+1=1+1=2$ 、公比 2 の等比数列である。

したがって、

$$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$\therefore a_n=2^n-1$$

このタイプの漸化式も非常に一般項 a_n を求めやすいので、最初に作った 3 つの基本形の漸化式と合わせて、この 4 つの漸化式をベースにして、与えられた漸化式をこの 4 つの式に変形していくことを考えていくとよい。

$a_{n+1}=a_n+d$ 　　$a_{n+1}=ra_n$ 　　$a_{n+1}=a_n+b_n$

↑

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

（代表的な変形）

・$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$

→両辺の逆数をとって整理する。このとき $\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおいて考えれば（☆）の形になる。

・$a_{n+1}=pa_n+q^n$

→両辺を q^{n+1} で割る。このとき $\dfrac{a_n}{q^n}=b_n$ とおいて考えれば（☆）の形になる。

・$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

（$f(n)$: nの 1 次式）

→ $a_{n+2}=pa_{n+1}+f(n+1)$

を作る。

↓

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{n+2}=pa_{n+1}+f(n+1) \\
-) & a_{n+1}=pa_n+f(n)
\end{array}
$$

を作る。

↓

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおいて考えれば（☆）の形になる。

３．やや複雑な、代表的な漸化式

１）連立形の漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha\, a_n + \beta\, b_n \cdots ① \\ b_{n+1} = \gamma\, a_n + \delta\, b_n \cdots ② \end{cases}$$

で与えられた漸化式は、

$$\boxed{a_{n+1} + k \cdot b_{n+1} = p(a_n + k \cdot b_n) \quad ・・・（※）}$$

をみたす定数 k と p が存在すれば、数列 $\{a_n + k \cdot b_n\}$ は初項 $a_1 + kb_1$，公比 p の等比数列となる。

↓

定数 k と p は｛①＋ k ×②｝の式と（※）を展開して整理した式と係数比較すれば値は求まる。

↓

考えうる $\{a_n + k \cdot b_n\}$ の一般項を求め、それらを連立して数列の一般項 a_n と b_n を求める。

２）隣接３項間の漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \cdots ③$$

で与えられた漸化式は、

$$\boxed{a_{n+2} - \alpha\, a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha\, a_n) \quad ・・・（★）}$$

をみたすαとβがあれば、数列 $\{a_{n+1} - \alpha\, a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha\, a_1$，公比βの等比数列となる。

↓

定数αとβは（★）を整理して③の式と係数比較すれば求まる。

↓

考えうる $\{a_{n+1} - \alpha\, a_n\}$ の一般項を求め、

それらを連立して、

a_{n+1} を消去して数列の一般項 a_n を求める。

このとき、αとβは、2 次方程式 $x^2 = px + q$ の解であることが分かる。

$x^2 = px + q$ を隣接 3 項間の特性方程式ということもある。