$\boxed{\text{数学的帰納法}}$　フローチャート

1．数学的帰納法の意味

さて、次のような数列の等式を証明してみよう。

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

これは、みなさんのよく知っている等差数列の和の公式です。既に導入を学びましたが、これを違う方法で証明してみよう。

↓

一番シンプルであるのは

$n=1$ のとき、(左辺) $=1$，(右辺) $=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$　より成立。

$n=2$ のとき、(左辺) $=1+2=3$，(右辺) $=\dfrac{2(2+1)}{2}=3$　より成立。

$n=3$ のとき、(左辺) $=1+2+3=6$，(右辺) $=\dfrac{3(3+1)}{2}=6$　より成立。

$n=4$ のとき、(左辺) $=1+2+3+4=10$，(右辺) $=\dfrac{4(4+1)}{2}=10$　より成立。

：

：

と順に追って説明していくことでしょう。しかしこれは能率悪いし、というかすべての自然数において説明するのは到底不可能である。

ここで、上の等式に対して

$$\begin{cases} \text{①}\ n=1\ \text{のときが成り立つ。} \\ \text{②}\ k=1,2,3,\cdots\ \text{であるとき、}\ n=k\ \text{のときに成り立つならば、}\ n=k+1\ \text{のときも成り立つ。} \end{cases}$$

という①と②を証明できたらどうなるかを考えてみよう。

↓

$n=1$ のときは、①より成り立つ。

$n=1$ のときが成り立つので、②より $n=2$ のときが成り立つ。

$n=2$ のときが成り立つので、②より $n=3$ のときが成り立つ。

$n=3$ のときが成り立つので、②より $n=4$ のときが成り立つ。

：

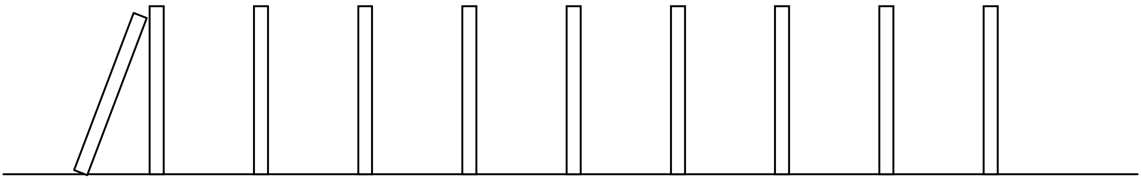
：

と、①と②の２つを示しただけで、一つずつ順に追って証明されていくことがわかる。つまり、最終的には全ての自然数において等式が成り立つことを示したことになる。

この証明方法を『数学的帰納法』という。

（なんて便利な証明方法なのでしょう〜〜）

数学的帰納法は、よくドミノ倒しや、将棋倒しを例にして、イメージしてもらうことが多い。



①一枚目のドミノは倒れる

②このドミノは、必ず隣同士順に追って倒れていく

上の①、②が揃えば、全てのドミノが倒れることが確定する。数学的帰納法もこれと同じイメージを持ってもらえると良いかと思います。

《数学的帰納法のやり方》

①最初に必要であるもの（例えば $n=1$ ）が成り立つことを示す。

②ループ（例えば $n=k$ のときに成り立つならば、 $n=k+1$ のときも成り立つ）を示す。

２．数学的帰納法での証明例

（例１）$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　　$(n=1,2,3,\cdots)$　を示せ。

【証明】

最初に必要であるものを示す。

（ⅰ）$n=1$ のとき、（左辺）$=1$，（右辺）$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$　より成立。

（ⅱ）$n=k$ ($k=1,2,3,\cdots$) であるとき、

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}\qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つと仮定する。この両辺に $(k+1)$ を加えると

ループを示す。

（左辺）$=1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)$

（右辺）$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

より

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

がなりたつ。つまり、$n=k+1$ のときに成立することが分かる。

順に追って一つずつ証明されていくことが確認された瞬間だ。

（ⅰ）（ⅱ）より、与えられた等式は全ての自然数 n において成り立つ。

（例２）$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$ を示せ。

【証明】

（ｉ）$n=1$ のとき、（左辺）$=1$，（右辺）$=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$　より（左辺）＜（右辺）が成り立つ。

（ⅱ）$n=k\ (k=1,2,\cdots)$ のとき

$$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

が成り立つと仮定する。この両辺に $(k+1)^2$ を加えると

（左辺）$=1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +k^2+(k+1)^2$

（右辺）$=\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2$

これは示したい右辺ではないので、もう一段階不等式を証明する。

ここで

$$\left\{\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2\right\}-\boxed{\frac{(k+2)^3}{3}}=-k-\frac{4}{3}<0\ (\because k>0)$$

実際に示したい右辺はこれ！先に求めた右辺と大小比較をする。

より、

$$\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2<\frac{(k+2)^2}{3}$$

であるので、

$$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +k^2+(k+1)^2<\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2<\frac{(k+2)^2}{3}$$

$A<B<C\Rightarrow A<C$ を利用した。

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +k^2+(k+1)^2<\frac{(k+2)^2}{3}$$

ゆえに、$n=k+1$ のときも、（左辺）＜（右辺）が成り立つ。

（ｉ）（ⅱ）から、全ての自然数 n において、与えられた不等式は成立する。