2次関数

重要例題集　2 次関数

第 1 問【関数の値域】

> 関数 $y=ax+b$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 1$ であるように，定数 a，b の値を定めよ．

＜解＞

[1]　$a>0$ のとき

この関数は，x の値が増加すると y の値も増加する．

よって　$x=0$ のとき $y=-1$，　$x=1$ のとき $y=1$

ゆえに　$b=-1$，　$a+b=1$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$　これは $a>0$ を満たす．

[2]　$a=0$ のとき

この関数は $y=b$ となり，値域が $-1 \leqq y \leqq 1$ とはならない．

[3]　$a<0$ のとき

この関数は，x の値が増加すると y の値は減少する．

よって　$x=0$ のとき $y=1$，　$x=1$ のとき $y=-1$

ゆえに　$b=1$，　$a+b=-1$

これを解いて　$a=-2$，$b=1$　これは $a<0$ を満たす．

[1]～[3] から　$a=2$，$b=-1$ または $a=-2$，$b=1$

第 2 問【2 次関数のグラフの平行移動】

> 次の放物線を平行移動したら，頂点の座標が $(2,\ 3)$ になった．このとき，どのように平行移動したかいえ．
>
> (1)　$y=-2x^2$　　(2)　$y=x^2-2x+6$　　(3)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+2x-1$

＜解＞

(1)　放物線 $y=-2x^2$ の頂点の座標は　　(0, 0)

点 (0, 0) を点 (2, 3) に移す平行移動について

$$2-0=2,\quad 3-0=3$$

したがって，x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した．

(2)　$x^2-2x+6=(x^2-2\cdot 1x+1^2)-1^2+6$

$$=(x-1)^2+5$$

よって，放物線 $y=x^2-2x+6$ の頂点の座標は　　(1, 5)

点 (1, 5) を点 (2, 3) に移す平行移動について

$$2-1=1,\quad 3-5=-2$$

したがって，x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した．

(3)　$\frac{1}{3}x^2+2x-1=\frac{1}{3}(x^2+6x)-1=\frac{1}{3}(x^2+2\cdot 3x+3^2)-\frac{1}{3}\cdot 3^2-1$

$$=\frac{1}{3}(x+3)^2-4$$

よって，放物線 $y=\frac{1}{3}x^2+2x-1$ の頂点の座標は　　$(-3,\ -4)$

点 $(-3,\ -4)$ を点 (2, 3) に移す平行移動について

$$2-(-3)=5,\quad 3-(-4)=7$$

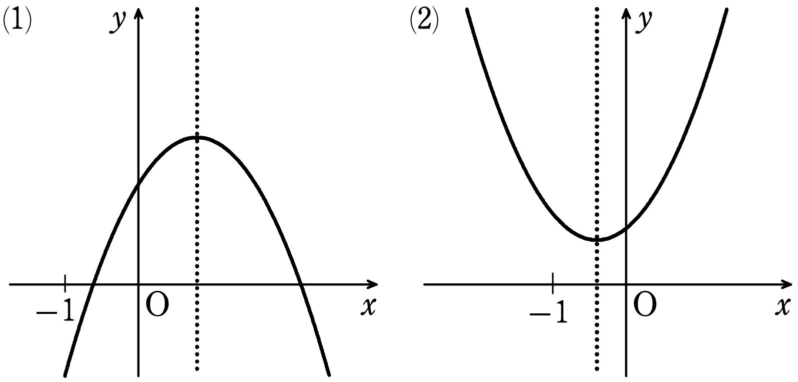
したがって，x 軸方向に 5，y 軸方向に 7 だけ平行移動した．

第 3 問【2 次関数の決定－グラフから】

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図で与えられるとき，

　a, b, c, $a-b+c$

の符号をそれぞれ調べよ．



＜解＞

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

軸の方程式は　$x=-\dfrac{b}{2a}$,　　y 軸との交点の座標は　$(0,\ c)$

また，$x=-1$ のとき　　　$y=a-b+c$

(1)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

軸は $x>0$ の範囲にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$

ここで $a<0$ であるから　　　$b>0$

y 軸と正の部分で交わるから　$c>0$

$x=-1$ のとき $y<0$ であるから　　$a-b+c<0$

(2)　グラフは下に凸であるから　$a>0$

軸は $x<0$ の範囲にあるから　$-\dfrac{b}{2a}<0$

ここで $a>0$ であるから　　　$b>0$

y 軸と正の部分で交わるから　$c>0$

$x=-1$ のとき $y>0$ であるから　　$a-b+c>0$

第 4 問【2 次関数の決定－移動】

放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動したもので，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある，放物線の方程式を求めよ．

＜解＞

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動したもので，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，その方程式は

$$y=2(x-p)^2+2p-3 \quad \cdots\cdots ①$$

とおける．これが点 $(1,\ 3)$ を通るから

$$3=2(1-p)^2+2p-3$$

整理して　$p^2-p-2=0$　　　よって　$(p+1)(p-2)=0$　　　ゆえに　$p=-1,\ 2$

① に代入して　　　$y=2x^2+4x-3,\ \ y=2x^2-8x+9$

第 5 問【2 次関数の決定－通る点・軸など】

グラフが，次の条件を満たすような x の 2 次関数を求めよ．
(1)　3 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ -5)$，$(3,\ 5)$ を通る．
(2)　頂点の座標が $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 7)$ を通る．
(3)　軸の方程式が $x=-2$ で，2 点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る．

＜解＞

(1)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく．
　このグラフが 3 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ -5)$，$(3,\ 5)$ を通るから

$$\boxed{\begin{cases} a-b+c=1 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-5 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}}$$

　②－① から　$2b=-6$　よって　$b=-3$
　③－② から　$8a+2b=10$　よって　$4a+b=5$　$\cdots\cdots$ ④
　$b=-3$ を ④ に代入して　$4a-3=5$　ゆえに　$a=2$
　$a=2$，$b=-3$ を ① に代入して　$2+3+c=1$　ゆえに　$c=-4$
　よって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-3x-4$

(2)　頂点の座標が $(-1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+1)^2+3$ とおける．
　このグラフが点 $(1,\ 7)$ を通るから　$7=4a+3$　ゆえに　$a=1$
　よって，求める 2 次関数は

$$y=(x+1)^2+3 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2+2x+4$$

(3)　軸の方程式が $x=-2$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+2)^2+q$ とおける．
　このグラフが 2 点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通るから

$$3=4a+q,\quad 0=a+q \qquad \text{これを解くと} \quad a=1,\ q=-1$$

　よって，求める 2 次関数は

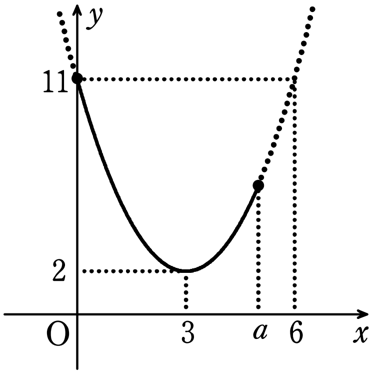
$$y=(x+2)^2-1 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2+4x+3$$

第 6 問【2 次関数の最大値・最小値－定義域による場合分け】

$0\leqq x\leqq a$ における関数 $y=x^2-6x+11$ の最大値が 11，最小値が 2 となるように，定数 a の値の範囲を定めよ．

＜解＞

$$y=x^2-6x+11$$
$$=(x-3)^2+2 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$



よって，この関数のグラフは，$3 \leqq a \leqq 6$ のとき右の図のようになり，最大値が 11，最小値が2 となる．
$a<3$ ならば最小値は 2 とはならない．
また，$a>6$ ならば最大値は 11 とはならない．
したがって，求める a の値の範囲は

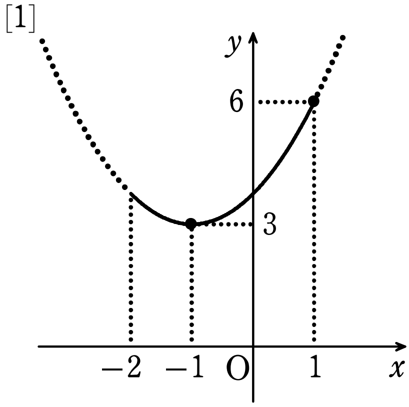
$$3 \leqq a \leqq 6$$

第 7 問【2 次関数の最大値・最小値－グラフの凸の形による場合分け】

関数 $y=ax^2+2ax+b$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ の最大値が 6，最小値が 3 であるように，定数 a，b の値を定めよ．

＜解＞

$$y=ax^2+2ax+b$$
$$=a(x+1)^2-a+b \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$$



[1]　$a>0$ のとき

この関数は，$x=1$ で最大値 $3a+b$，
$x=-1$ で最小値 $-a+b$ をとる．
よって　　$3a+b=6$，$-a+b=3$

これを解いて　　$a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{15}{4}$

これは $a>0$ を満たす．

[2]　$a=0$ のとき

この関数は $y=b$ となり，条件を満たさない．

[3]　$a<0$ のとき

この関数は，$x=-1$ で最大値 $-a+b$，

$x=1$ で最小値 $3a+b$ をとる．

よって　　$-a+b=6$，$3a+b=3$

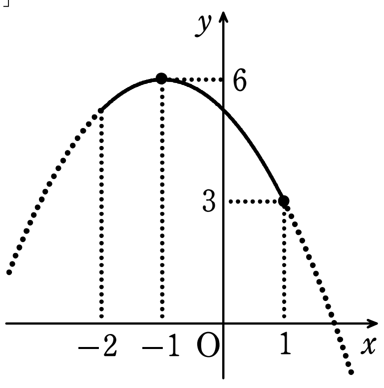
これを解いて　　$a=-\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{21}{4}$

これは $a<0$ を満たす．

[1]～[3] から

$$a=\frac{3}{4},\ b=\frac{15}{4}\ \text{または}\ a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{21}{4}$$

[3]



第 8 問【2 次関数の最大値・最小値－条件式をみたす関数の最大値・最小値】

$x+2y=6$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，次の式の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

(1)　xy　　　　(2)　x^2+2y^2

＜解＞

$x+2y=6$，$x\geqq 0$ から　　$x=6-2y\geqq 0$　　すなわち　$y\leqq 3$

$y\geqq 0$ であるから　　$0\leqq y\leqq 3$　…… ①

(1)　$xy=(6-2y)y=-2y^2+6y=-2\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

よって，① の範囲の y について，xy は $y=\dfrac{3}{2}$ のとき

最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとり，$y=0$，3 のとき最小値 0 をとる．

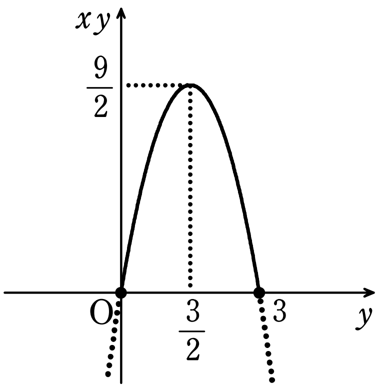
ここで　　$y=\dfrac{3}{2}$ のとき $x=3$，

$y=0$ のとき $x=6$，　$y=3$ のとき $x=0$

したがって

$x=3$，$y=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$，

$x=0$，$y=3$ または $x=6$，$y=0$ のとき最小値 0



(2)　$x^2+2y^2=(6-2y)^2+2y^2$

$=6y^2-24y+36$

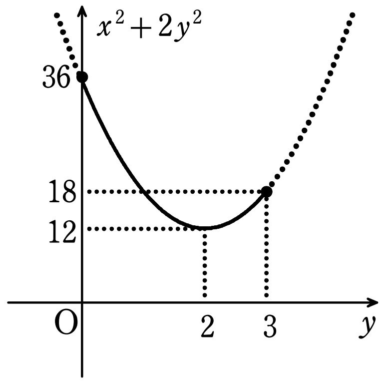
$=6(y-2)^2+12$

よって，① の範囲の y について，x^2+2y^2 は $y=0$ のとき最大値 36 をとり，$y=2$ のとき最小値 12 をとる．

ここで　$y=0$ のとき $x=6$，　$y=2$ のとき $x=2$

ゆえに　$x=6$，$y=0$ のとき最大値 36

$x=2$，$y=2$ のとき最小値 12



第 9 問【2 次関数の最大値・最小値－グラフの軸による場合分け】

関数 $y=x^2-2ax+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を次の各場合について求めよ．

(1)　$a\leqq 0$　(2)　$0<a<1$　(3)　$a=1$　(4)　$1<a<2$　(5)　$2\leqq a$

＜解＞

$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$

(1)　$a\leqq 0$ のとき

グラフは〔図〕の実線部分のようになる．

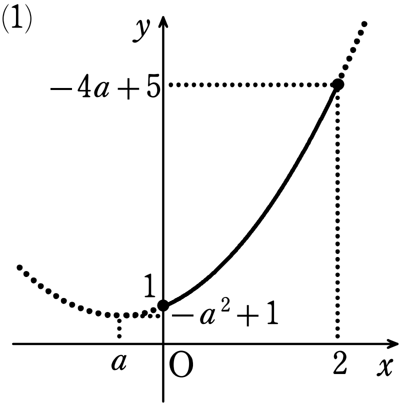
よって　$x=2$ のとき最大値 $-4a+5$，　$x=0$ のとき最小値 1

(2)　$0<a<1$ のとき

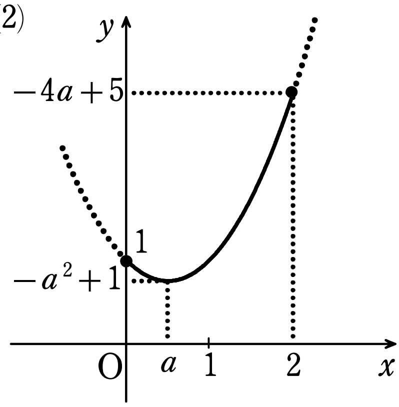
グラフは〔図〕の実線部分のようになる．

よって　$x=2$ のとき最大値 $-4a+5$，　$x=a$ のとき最小値 $-a^2+1$

(1)



(2)



(3)　$a=1$ のとき　　$y=(x-1)^2$

よって　　　$x=0,\ 2$ のとき最大値 1，　$x=1$ のとき最小値 0

(4)　$1<a<2$ のとき

グラフは〔図〕の実線部分のようになる．

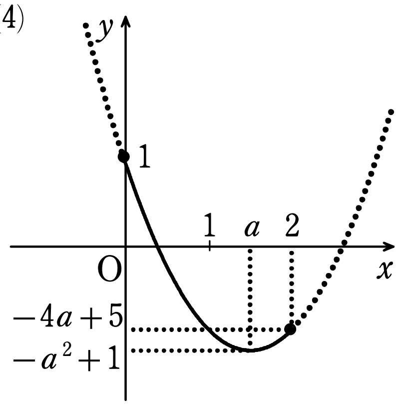
よって　　　$x=0$ のとき最大値 1，　$x=a$ のとき最小値 $-a^2+1$

(5)　$2\leqq a$ のとき

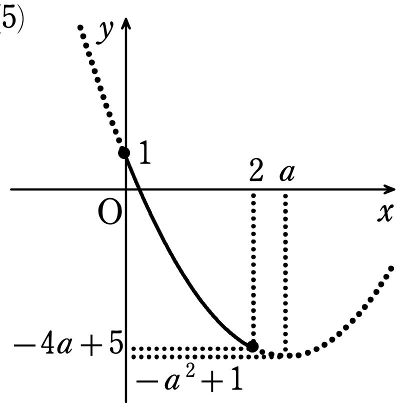
グラフは〔図〕の実線部分のようになる．

よって　　　$x=0$ のとき最大値 1，　$x=2$ のとき最小値 $-4a+5$

(4)



(5)



第 10 問【2 次関数の最大値・最小値－複 2 次の関数】

次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(1)　$y=-2x^4-4x^2+3$　　　　(2)　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+10$

＜解＞

(1)　$t=x^2$ とおくと

$$t\geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

また　　$y=-2(x^2)^2-4x^2+3$

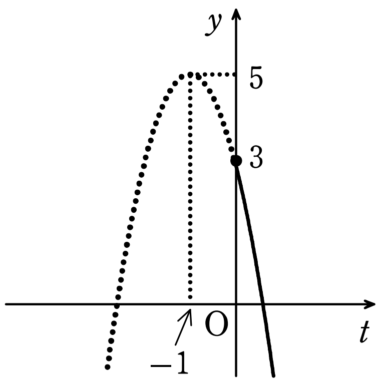
$=-2t^2-4t+3$

$=-2(t+1)^2+5$

よって，① の範囲の t について，y は $t=0$

すなわち　$x=0$ のとき最大値 3 をとる．

最小値はない．



(2) $t=x^2-2x$ とおくと

$$t=(x-1)^2-1$$

であるから

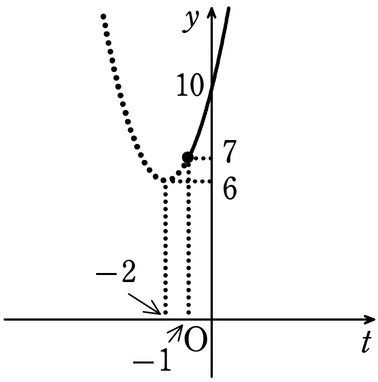
$$t \geqq -1 \quad \cdots\cdots ①$$

また　　$y=t^2+4t+10=(t+2)^2+6$

よって，① の範囲の t について，y は $t=-1$

すなわち $x=1$ のとき最小値 7 をとる．

最大値はない．



第 11 問【2 次関数の最大値・最小値－図形（文章題）への応用】

周囲の長さが 20 cm である長方形について，次の問いに答えよ．

(1) この長方形の面積の最大値を求めよ．また，このとき，長方形はどのような形か．

(2) この長方形の対角線を 1 辺とする正方形の面積の最小値を求めよ．

＜解＞

(1) 長方形の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $\dfrac{20-2x}{2}=10-x$ (cm) である．

また，$x>0$，$10-x>0$ であるから　　$0<x<10$

この長方形の面積を y cm^2 とすると

$$y=x(10-x)=-(x-5)^2+25$$

$x=5$ は定義域 $0<x<10$ に含まれるから，y は $x=5$ のとき最大値 25 をとる．

よって，長方形の面積の最大値は 25 cm^2 である．

このとき，縦の長さも横の長さも 5 cm になるから，長方形の形は正方形である．

(2) 長方形の対角線の長さを z cm とすると　　$z^2=x^2+(10-x)^2$

よって，正方形の面積を S cm^2 とすると

$$S=x^2+(10-x)^2=2(x-5)^2+50$$

$x=5$ は定義域 $0<x<10$ に含まれるから，S は $x=5$ のとき最小値 50 をとる．

よって，正方形の面積の最小値は　　50 cm^2

第 12 問【絶対値記号の含む関数】

次の関数のグラフをかけ，また，最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1)　$y=|x|$　　　(2)　$y=|x-2|$　　　(3)　$y=|2x-4|$

(4)　$y=x^2-4|x|$　　　(5)　$y=|x+1|(x-3)$

＜解＞

(1)　$x \geqq 0$　　$y=|x|=x$　　$x<0$　　$y=|x|=-x$

よって，グラフは〔図〕の実線部分である．

ゆえに，$x=0$ のとき最小値 0 をとる．最大値はない．

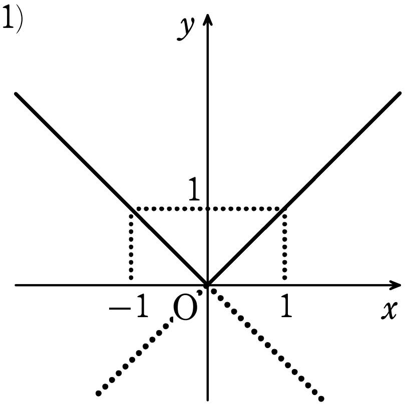
(2)　$x-2 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 2$ のとき　　$y=x-2$

$x-2<0$ すなわち $x<2$ のとき　　$y=-x+2$

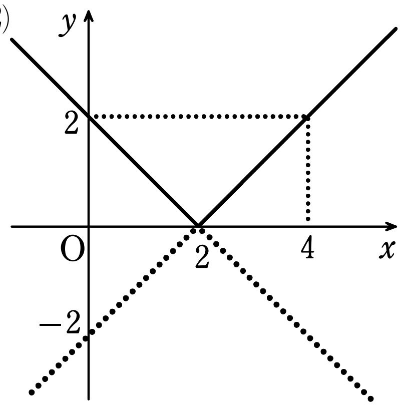
よって，グラフは〔図〕の実線部分である．

ゆえに，$x=2$ のとき最小値 0 をとる．最大値はない．

(1)



(2)



(3)　$2x-4 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 2$ のとき　　$y=2x-4$

$2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき　　$y=-2x+4$

よって，グラフは〔図〕の実線部分である．

ゆえに，$x=2$ のとき最小値 0 をとる．最大値はない．

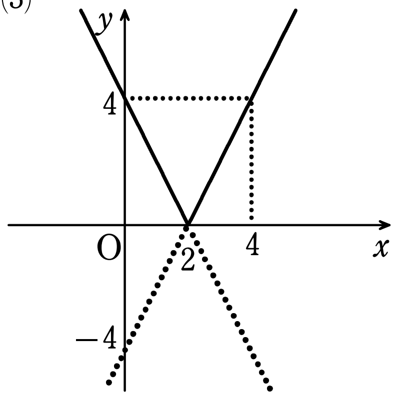
(4)　$x \geqq 0$ のとき　　$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$x<0$ のとき　　$y=x^2+4x=(x+2)^2-4$

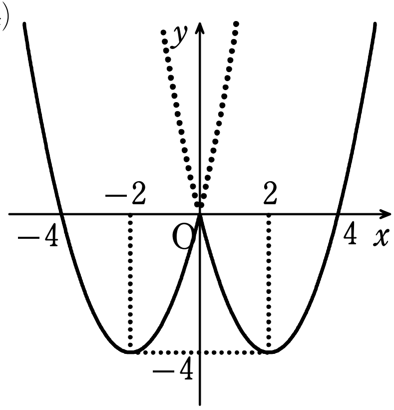
よって，グラフは〔図〕の実線部分である．

ゆえに，$x=-2$，2 のとき最小値 -4 をとる．最大値はない．

(3)



(4)



(5) $x+1 \geqq 0$ すなわち $x \geqq -1$ のとき

$y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

$=(x-1)^2-4$

$x+1<0$ すなわち $x<-1$ のとき

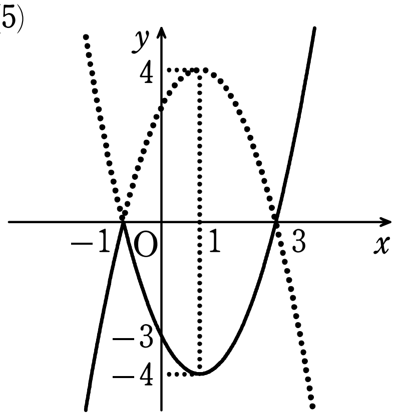
$y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$

よって，グラフは〔図〕の実線部分である．

ゆえに，最大値も最小値もない．

(5)



第 13 問【絶対値記号の含む関数の最大値・最小値】

定義域が $-2 \leqq x \leqq 3$ の関数 $f(x)=|x+1|+|x-1|+|x-2|$ の最大値は ア $\boxed{}$ で，

最小値は イ $\boxed{}$ である．

＜解＞

$x<-1$ のとき

$$f(x)=-(x+1)-(x-1)-(x-2)=-3x+2$$

$-1\leqq x<1$ のとき

$$f(x)=(x+1)-(x-1)-(x-2)=-x+4$$

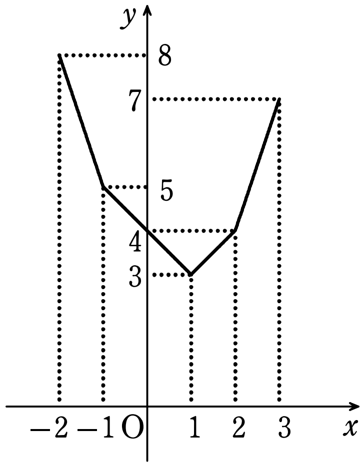
$1\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=(x+1)+(x-1)-(x-2)=x+2$$

$2\leqq x$ のとき

$$f(x)=(x+1)+(x-1)+(x-2)=3x-2$$

よって，$-2\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．



したがって，$f(x)$ は

$x=-2$ のとき最大値 8，　$x=1$ のとき最小値 3　をとる．

ゆえに　（ア）8　（イ）3

第 14 問【2 次関数のグラフと x 軸との共有点の個数】

2 次関数 $y=x^2-x+m$ のグラフと x 軸の共有点の個数を調べよ．

＜解＞

共有点の個数は，方程式 $x^2-x+m=0$ の実数解の個数と一致する．

方程式の判別式 D は，

$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot m=-4m+1$

この符号を調べると

$m<\dfrac{1}{4}$ のとき　$-4m+1>0$　このとき，共有点の個数は　2 個

$m=\dfrac{1}{4}$ のとき　$-4m+1=0$　このとき，共有点の個数は　1 個

$m>\dfrac{1}{4}$ のとき　$-4m+1<0$　このとき，共有点はない．

第 15 問【2 次関数のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ】

次の 2 次関数のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(1)　$y=x^2-5x-14$　　(2)　$y=-2x^2+3x+2$　　(3)　$y=x^2+5x+1$

＜解＞

(1)　グラフと x 軸との共有点の x 座標は $x^2-5x-14=0$ の解である.

これを解くと　$(x+2)(x-7)=0$　　ゆえに　$x=-2,\ 7$

よって，求める線分の長さは　$7-(-2)=9$

(2)　グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-2x^2+3x+2=0$ の解である.

両辺に -1 を掛けて　$2x^2-3x-2=0$

よって　$(2x+1)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=-\dfrac{1}{2},\ 2$

よって，求める線分の長さは　$2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

(3)　グラフと x 軸との共有点の x 座標は $x^2+5x+1=0$ の解である.

これを解くと　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

よって，求める線分の長さは　$\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}-\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}=\sqrt{21}$

第 16 問【2 次不等式の解き方】

次の不等式を解け.

(1)　$x^2-11x+30\geqq0$　　(2)　$x^2-14x+49>0$

(3)　$3x^2-7x+2\leqq0$　　(4)　$2x\geqq x^2+1$

(5)　$x^2-3x>-1$　　(6)　$\begin{cases} x^2-3x\geqq x+21 \\ x^2+3x<4 \end{cases}$

＜解＞

(1)　$x^2-11x+30\geqq 0$ から　$(x-5)(x-6)\geqq 0$　　よって　$x\leqq 5,\ 6\leqq x$

(2)　$x^2-14x+49>0$ から　$(x-7)^2>0$　　よって，解は 7 以外のすべての数.

(3)　$3x^2-7x+2\leqq 0$ から　$(3x-1)(x-2)\leqq 0$　　よって　$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 2$

(4)　両辺に -1 を掛けて整理すると

$$x^2-2x+1\leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad (x-1)^2\leqq 0$$

よって，与えられた不等式の解は　$x=1$

(5)　整理すると　$x^2-3x+1>0$

$x^2-3x+1=0$ を解くと　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

よって，与えられた不等式の解は　$x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x$

(6)　$\begin{cases} x^2-3x\geqq x+21 & \cdots\cdots ① \\ x^2+3x<4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2-4x-21\geqq 0$　　よって　$(x+3)(x-7)\geqq 0$

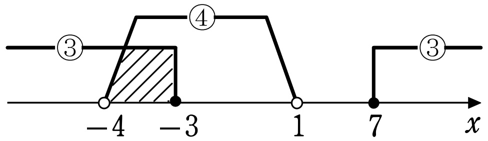
ゆえに　$x\leqq -3,\ 7\leqq x$　…… ③

② から　$x^2+3x-4<0$　　よって　$(x+4)(x-1)<0$

ゆえに　$-4<x<1$　…… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$-4<x\leqq -3$$



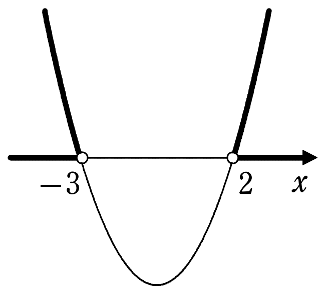
第 17 問 **【2 次不等式－係数決定】**

2 次不等式 $ax^2+x+b>0$ の解が $x<-3,\ 2<x$ であるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ.

＜解＞

条件から，$y=ax^2+x+b$ のグラフは $x<-3,\ x<2$ の範囲で x 軸より上方にある.

すなわち，下に凸である放物線で，2 点 $(-3,\ 0),\ (2,\ 0)$ を通るから



$a>0$　…… ①

$9a-3+b=0$　…… ②

$4a+2+b=0$　…… ③

②，③ を連立して解くと

$a=1,\ b=-6$　　これは ① を満たす.

第 18 問【文字を含む 2 次不等式】

次の 2 次不等式を解け．ただし，a は定数とする．
(1)　$(x+2)(x-a)<0$　　　　(2)　$(x-2a)(x-a+1)>0$

＜解＞

(1)　$(x+2)(x-a)<0$

$(x+2)(x-a)=0$ を解くと　　$x=-2,\ a$

[1]　$a<-2$ のとき　　① の解は　　$a<x<-2$

[2]　$a=-2$ のとき　　① は $(x+2)^2<0$ となり，解はない．

[3]　$-2<a$ のとき　　① の解は　　$-2<x<a$

(2)　$(x-2a)(x-a+1)>0$ …… ①

$(x-2a)(x-a+1)=0$ を解くと　　$x=2a,\ a-1$

[1]　$2a<a-1$ すなわち $a<-1$ のとき

① の解は　　$x<2a,\ a-1<x$

[2]　$2a=a-1$ すなわち $a=-1$ のとき

① は $(x+2)^2>0$ となり，解は　　-2 以外のすべての数

[3]　$2a>a-1$ すなわち $-1<a$ のとき

① の解は　　$x<a-1,\ 2a<x$

第 19 問【方程式の実数解の個数－最高次の係数が文字】

a は定数とする．次の方程式の解の個数を調べよ．
(1)　$(a+2)x^2+2ax+2a-3=0$　　　　(2)　$ax^2+(3a+1)x+2(a+1)=0$

＜解＞

(1)

[1]　$a \fallingdotseq -2$ のとき

$$D=(2a)^2-4(a+2)(2a-3)=-4(a^2-a+6)=-4(a+3)(a-2)$$

とする．

$-3<a<2$ $(a \fallingdotseq -2)$ のとき $D>0$ となるから，① は異なる 2 つの解をもつ．

$a=-3,\ 2$ のとき $D=0$ となるから，① は重解をもつ．

$a<-3,\ 2<a$ のとき $D<0$ となるから，① は解をもたない．

[2]　$a=-2$ のとき

① は $-4x-7=0$ となるから，解は 1 個.

[1], [2] により，① の解の個数は

$-3<a<-2$, $-2<a<2$ のとき 2 個，　$a=-3$, -2, 2 のとき 1 個,

$a<-3$, $2<a$ のとき なし

(2)　与えられた方程式を ① とする.

[1]　$a\fallingdotseq 0$ のとき

$$D=(3a+1)^2-4\cdot a\cdot 2(a+1)=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

とする.

$a\fallingdotseq 1$ のとき $D>0$ となるから，① は異なる 2 つの解をもつ.

$a=1$ のとき $D=0$ となるから，① は重解をもつ.

[2]　$a=0$ のとき

① は $x+2=0$ となるから，解は 1 個.

[1], [2] により，① の解の個数は

$a<0$, $0<a<1$, $1<a$ のとき 2 個，　$a=0$, 1 のとき 1 個

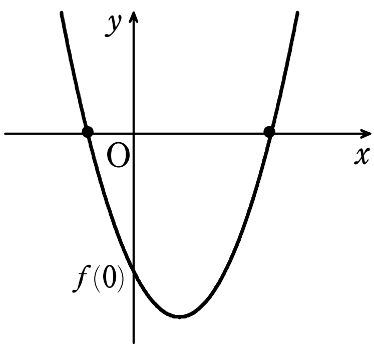
第 20 問【2 次関数のグラフと x 軸との交点の位置（方程式の解の分離 1）】

放物線 $y=x^2+2(a-1)x+3-a^2$ が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わるように，定数 a の値の範囲を定めよ.

＜解＞

$f(x)=x^2+2(a-1)x+3-a^2$ とおく.

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるための条件は，放物線が y 軸の負の部分と交わることである.



したがって　$f(0)<0$　すなわち　$3-a^2<0$

よって　$a^2-3>0$

ゆえに　$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

したがって　$a<-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<a$

第 21 問【2 次関数のグラフと x 軸との交点の位置（方程式の解の分離２）】

次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を，それぞれ求めよ．

(1)　2 次方程式 $2x^2-3x+a=0$ の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 1 と 2 の間にある．

(2)　2 次方程式 $2ax^2-(a+2)x-5=0$ の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にある．ただし，$a>0$ とする．

＜解＞

(1)　$f(x)=2x^2-3x+a$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 1 と 2 の間にあるための条件は

$$f(0)>0 \quad かつ \quad f(1)<0 \quad かつ \quad f(2)>0$$

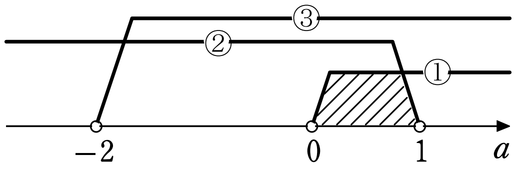
$f(0)>0$ から　$a>0$　……①

$f(1)<0$ から　$-1+a<0$

ゆえに　$a<1$　……②

$f(2)>0$ から　$2+a>0$

ゆえに　$a>-2$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　$0<a<1$

(2)　$f(x)=2ax^2-(a+2)x-5$ とおく．

$a>0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，$f(0)=-5<0$ である．

よって，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるための条件は

$$f(-1)>0 \quad かつ \quad f(2)<0 \quad かつ \quad f(3)>0$$

$f(-1)>0$ から　$3a-3>0$

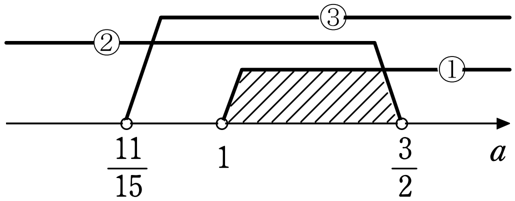
ゆえに　$a>1$　……①

$f(2)<0$ から　$6a-9<0$

ゆえに　$a<\frac{3}{2}$　……②

$f(3)>0$ から　$15a-11>0$

ゆえに　$a>\frac{11}{15}$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　$1<a<\frac{3}{2}$

第 22 問【2 次関数のグラフと x 軸との交点の位置（方程式の解の分離３）】

放物線 $y=x^2+ax+2$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ． (1)　x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わる． (2)　x 軸の $x<-1$ の部分と異なる 2 点で交わる．

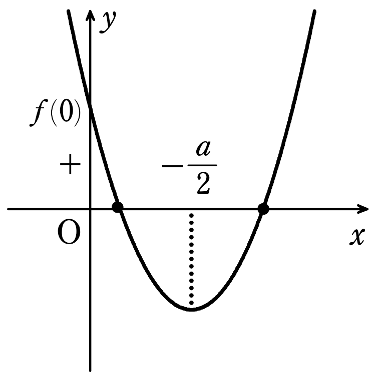
＜解＞

$f(x)=x^2+ax+2$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸の方程式は $x=-\dfrac{a}{2}$ である．

(1)　放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$$\boxed{\begin{array}{lr} a^2-4\cdot1\cdot2>0 & \cdots\cdots ① \\ f(0)=2>0 & \cdots\cdots ② \\ \text{軸について}\quad -\dfrac{a}{2}>0 & \cdots\cdots ③ \end{array}}$$



の 3 つが同時に成り立つことである．

① から　　$a^2-8>0$

すなわち　　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　　$a<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<a$　$\cdots\cdots$ ④

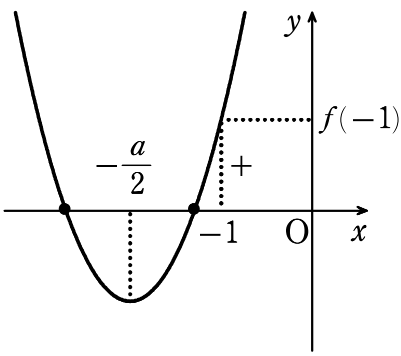
② は常に成り立つ．

③ から　　$a<0$　$\cdots\cdots$ ⑤

よって，④，⑤ の共通範囲を求めて　　$a<-2\sqrt{2}$

(2)　放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $x<-1$ の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$$\boxed{\begin{array}{lr} a^2-4\cdot1\cdot2>0 & \cdots\cdots ① \\ f(-1)=1-a+2>0 & \cdots\cdots ② \\ \text{軸について}\quad -\dfrac{a}{2}<-1 & \cdots\cdots ③ \end{array}}$$



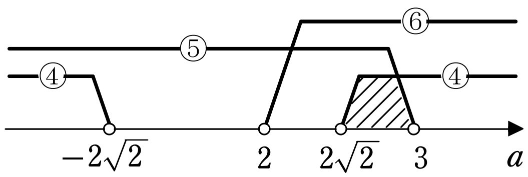
の 3 つが同時に成り立つことである．

① から　　$a<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<a$　$\cdots\cdots$ ④

② から　　$a<3$　$\cdots\cdots$ ⑤

③ から　　$a>2$　$\cdots\cdots$ ⑥

よって，④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　　$2\sqrt{2}<a<3$



第 23 問【絶対（2 次）不等式－x が実数全体】

不等式 $(a-1)x+a+1>-(x+1)^2$ が，どのような x の値に対しても成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ．

＜解＞

不等式を整理すると　　$x^2+(a+1)x+a+2>0$

これがどのような x の値に対しても成り立つための条件は

方程式　$x^2+(a+1)x+a+2=0$　が実数解をもたないこと．

よって，この方程式の判別式について，

$$(a+1)^2-4\cdot1\cdot(a+2)<0$$

となることである．

整理すると　$a^2-2a-7<0$　　$a^2-2a-7=0$ を解くと　$a=1\pm2\sqrt{2}$

よって，a の値の範囲は　$1-2\sqrt{2}<a<1+2\sqrt{2}$

第 24 問【絶対（2 次）不等式－x が閉区間】

次の 2 次不等式が，与えられた範囲内において常に成り立つように，定数 m の値の範囲をそれぞれ定めよ．

(1)　$x^2-2x+m\geqq0$　（ア）$-2\leqq x\leqq0$　（イ）$0\leqq x\leqq3$　（ウ）$x\geqq3$

(2)　$x^2+2mx+1\geqq0$　$0\leqq x\leqq2$

＜解＞

(1)　$f(x)=x^2-2x+m$ とすると　　$f(x)=(x-1)^2+m-1$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=1$ である．

（ア）$-2\leqq x\leqq0$ で常に $f(x)\geqq0$ であるための条件は

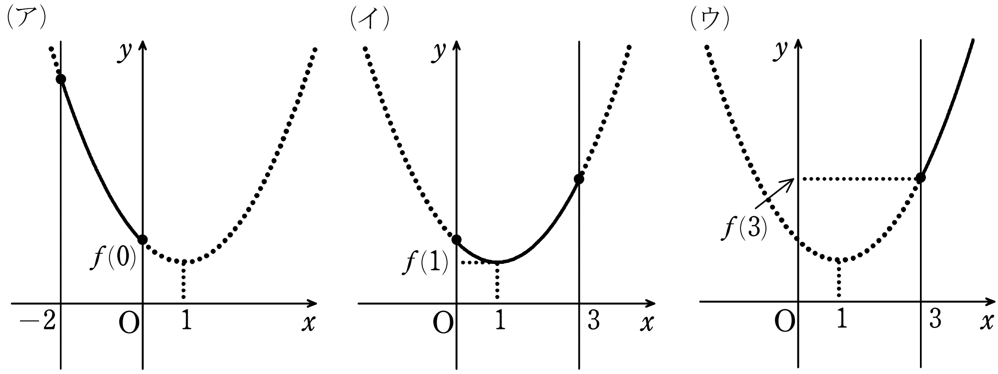
$f(0)\geqq0$　　よって　$m\geqq0$

（イ）$0\leqq x\leqq3$ で常に $f(x)\geqq0$ であるための条件は

$f(1)\geqq0$　すなわち　$m-1\geqq0$　　よって　$m\geqq1$

（ウ）$x\geqq3$ で常に $f(x)\geqq0$ であるための条件は

$f(3)\geqq0$　すなわち　$9-6+m\geqq0$　　よって　$m\geqq-3$



(2)　$f(x)=x^2+2mx+1$ とすると　　$f(x)=(x+m)^2+1-m^2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=-m$ である.

[1]　$-m \leqq 0$ すなわち $m \geqq 0$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ で常に $f(x) \geqq 0$ であるための条件は　　$f(0) \geqq 0$

$f(0)=1$ であるから，これは常に成り立つ.

したがって　　　$m \geqq 0$　…… ①

[2]　$0<-m<2$ すなわち $-2<m<0$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ で常に $f(x) \geqq 0$ であるための条件は

$f(-m) \geqq 0$　　すなわち　　$1-m^2 \geqq 0$

よって　　$(m+1)(m-1) \leqq 0$　　ゆえに　　$-1 \leqq m \leqq 1$

これと $-2<m<0$ の共通部分は　　$-1 \leqq m<0$　…… ②

[3]　$2 \leqq -m$ すなわち $m \leqq -2$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ で常に $f(x) \geqq 0$ であるための条件は

$f(2) \geqq 0$　　すなわち　　$4+4m+1 \geqq 0$

ゆえに　　$m \geqq -\dfrac{5}{4}$　　　これは $m \leqq -2$ を満たさない.

① と ② の範囲を合わせて　　$m \geqq -1$