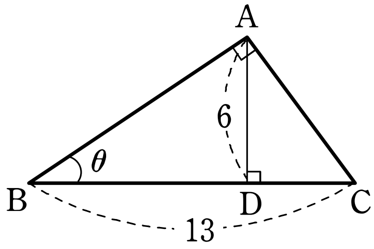
三角比

重要例題集　三角比

第 1 問【三角比の定義と図形】

右の図のように，AB＞AC である直角三角形 ABC において，BC＝13，AD＝6 である．
(1)　BD，CD の長さを求めよ．
(2)　$\cos\theta$ の値を求めよ．



＜解＞

(1)　BD＝x とすると　　CD＝$13-x$
また，$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{CAD}$ であるから

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}$$

よって　　$\dfrac{x}{6}=\dfrac{6}{13-x}$

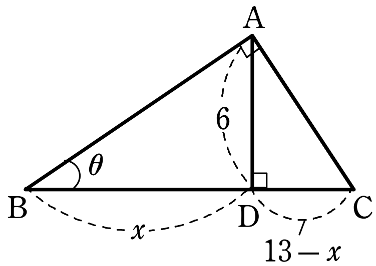
ゆえに　　$x(13-x)=36$

これを解くと　　$x=4,\ 9$

AB＞AC より BD＞CD であるから

$x>13-x$　　　よって　$x>\dfrac{13}{2}$　　　ゆえに　$x=9$

したがって　　BD＝9，CD＝4



(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{BD}^2+\mathrm{AD}^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{3^2(3^2+2^2)}=3\sqrt{13}$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{9}{3\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

第 2 問【三角比の定義と単位円】

O (0，0)，A (5，0)，P (−3，4) とする．∠AOP＝θ とするとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

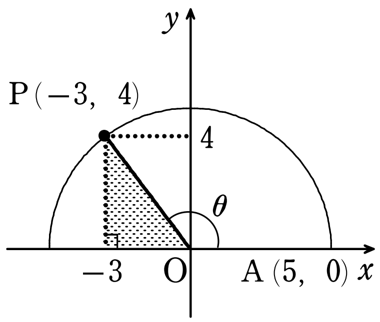
<解>

図から　　$OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

したがって　　$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$\tan\theta = -\frac{4}{3}$



第 3 問【三角関数の相互関係】

sin θ，cos θ，tan θ のうち，1 つが次のように与えられたとき，他の 2 つの値を求めよ．指定のない場合は $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1)　$\sin\theta = \frac{3}{5}$　$(0° \leqq \theta \leqq 90°)$　　(2)　$\sin\theta = \frac{2}{5}$　$(90° \leqq \theta \leqq 180°)$

(3)　$\cos\theta = \frac{1}{3}$　　(4)　$\cos\theta = -\frac{4}{5}$　　(5)　$\tan\theta = 2$

<解>

(1)　$\underline{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき $\cos\theta \geqq 0$ であるから　　$\cos\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

また　　$\underline{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

(2)　$\underline{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta} = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$

$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき $\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

また　　$\underline{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{2}{5} \div \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{2}{\sqrt{21}}$

(3) $\underline{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\sin\theta \geqq 0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

また　　$\underline{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\div\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$

(4) $\underline{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\sin\theta \geqq 0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

また　　$\underline{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}$

(5) $\underline{\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta}=1+2^2=5$　　よって　　$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\tan\theta>0$ より $\cos\theta>0$ であるから　　$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

第 4 問【90°　－ θ，180°　－ θ の三角比】

次の式を簡単にせよ.

(1) $\sin 10^\circ\cos 80^\circ-\sin 100^\circ\cos 170^\circ$　　(2) $\frac{1}{\sin^2 20^\circ}-\tan^2 110^\circ$

(3) $\sin^2(90^\circ+\theta)+\sin^2(180^\circ-\theta)+\cos^2(90^\circ+\theta)+\sin^2(90^\circ-\theta)$

＜解＞

(1) $\underline{\cos 80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\sin 10^\circ}$

$\underline{\sin 100^\circ=\sin(90^\circ+10^\circ)=\cos 10^\circ}$

$\underline{\cos 170^\circ=\cos(180^\circ-10^\circ)=-\cos 10^\circ}$

よって　　(与式) $=\sin 10^\circ\sin 10^\circ-\cos 10^\circ(-\cos 10^\circ)$

$=\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ=1$

(2)　$\tan 110^\circ = \tan(90^\circ + 20^\circ) = -\dfrac{1}{\tan 20^\circ}$

よって　　　$(\text{与式}) = \dfrac{1}{\sin^2 20^\circ} - \left(-\dfrac{1}{\tan 20^\circ}\right)^2 = \dfrac{1}{\sin^2 20^\circ} - \left(-\dfrac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right)^2$

$$= \frac{1}{\sin^2 20^\circ} - \frac{\cos^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = \frac{1-\cos^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = 1$$

(3)　$(\text{与式}) = \cos^2\theta + \sin^2\theta + (-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta$

$$= 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$$

第 5 問【三角比の方程式】

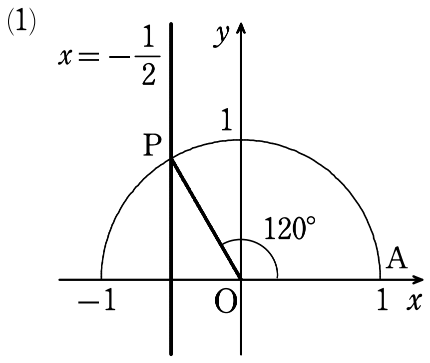
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ．

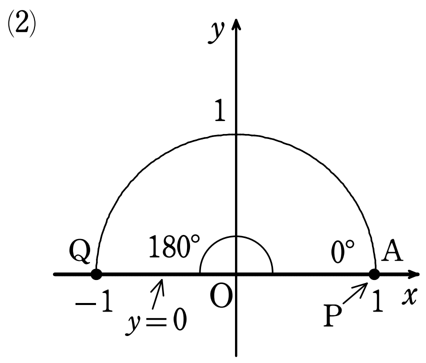
(1)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　　(2)　$\sin\theta = 0$　　　(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

＜解＞

(1)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は，下の図で $\angle\mathrm{AOP}$ であるから　　$\theta = 120^\circ$

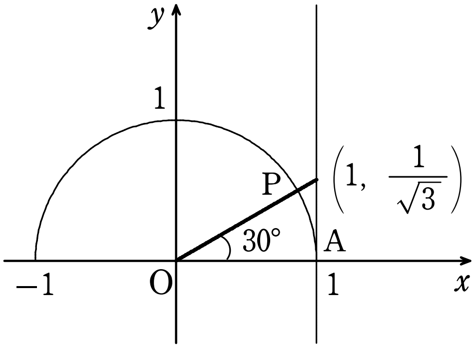
(2)　$\sin\theta = 0$ を満たす θ は，下の図で $\angle\mathrm{AOP}$ と $\angle\mathrm{AOQ}$ であるから　　$\theta = 0^\circ,\ 180^\circ$





(3) $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は，右の図で
∠AOP であるから

$\theta=30°$



第 6 問【三角比と不等式】

$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする．次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．
(1) $\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\cos\theta\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $0<\tan\theta\leqq1$
(4) $1<2\sin\theta\leqq\sqrt{3}$　(5) $1\leqq-2\cos\theta<\sqrt{3}$　(6) $-1<\sqrt{3}\tan\theta<3$

＜解＞

(1) $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　$\theta=45°,\ 135°$

図から，不等式の解は　$45°<\theta<135°$

(2) $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　$\theta=150°$

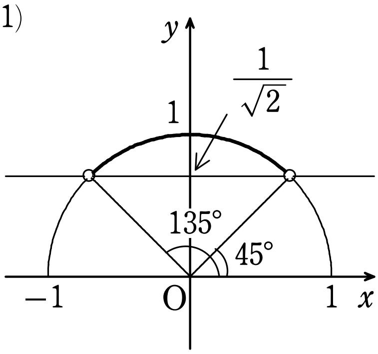
図から，不等式の解は　$150°\leqq\theta\leqq180°$

(3) $\tan\theta=0$ を満たす θ は　$\theta=0°,\ 180°$

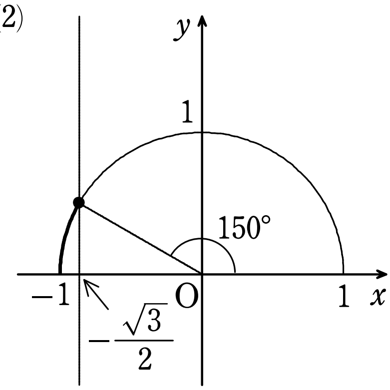
$\tan\theta=1$ を満たす θ は　$\theta=45°$

図から，不等式の解は　$0°<\theta\leqq45°$

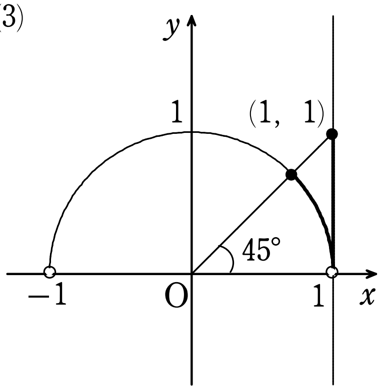
(1)



(2)



(3)



(4)　$1 < 2\sin\theta \leqq \sqrt{3}$ から

$$\frac{1}{2} < \sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　　　$\theta = 30°,\ 150°$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　　　$\theta = 60°,\ 120°$

図から，不等式の解は

$$30° < \theta \leqq 60°,\ 120° \leqq \theta < 150°$$

(5)　$1 \leqq -2\cos\theta < \sqrt{3}$ から

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta \leqq -\frac{1}{2}$$

$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　　　$\theta = 150°$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　　　$\theta = 120°$

図から，不等式の解は

$$120° \leqq \theta < 150°$$

(6)　$-1 < \sqrt{3}\tan\theta < 3$ から

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan\theta < \sqrt{3}$$

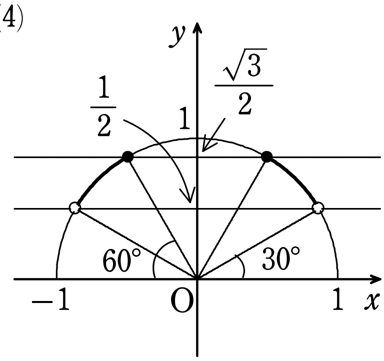
$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は　　　$\theta = 150°$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ は　　　$\theta = 60°$

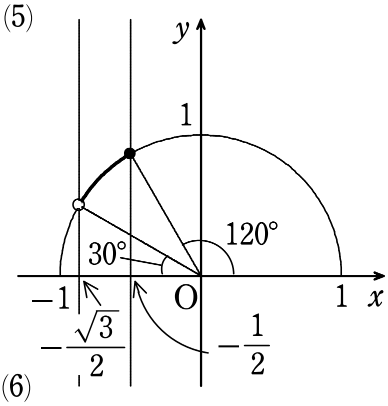
図から，不等式の解は

$$0° \leqq \theta < 60°,\ 150° < \theta \leqq 180°$$

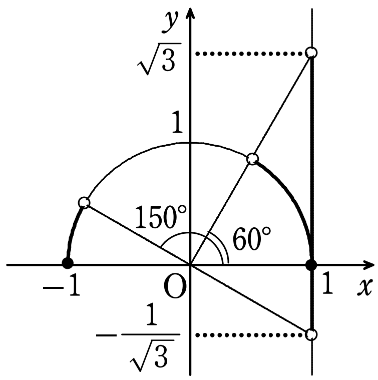
(4)



(5)



(6)



第 7 問【相互関係と方程式の応用】

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，等式 $4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$ を満たす θ の値を求めよ．

＜解＞

等式から　　$\underline{4(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta} - 1 = 0$

整理して　　$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

よって　　$(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 3) = 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　$\left(\cos\theta = -\dfrac{3}{2}\text{ は不適}\right)$

したがって　　$\theta = 60°$

第 8 問【正弦定理の使い方】

△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$a = 10$，$A = 45°$，$C = 30°$ のとき，c と外接円の半径

(2)　$b = \sqrt{2}$，$c = 2$，$B = 30°$ のとき　C

(3)　$B = 70°$，$C = 50°$，$a = 8$ のとき，外接円の半径

(4)　$A = 120°$，外接円の半径 $R = 8$ のとき　a

(5)　$a = 5\sqrt{3}$，外接円の半径 $R = 5$ のとき　A

＜解＞

(1)　△ABC の外接円の半径を R とする．

正弦定理により　　$\underline{\dfrac{10}{\sin 45°} = \dfrac{c}{\sin 30°} = 2R}$

よって　　$c = \dfrac{10\sin 30°}{\sin 45°} = 5\sqrt{2}$，　$R = \dfrac{10}{2\sin 45°} = 5\sqrt{2}$

(2)　正弦定理により　　$\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°} = \dfrac{2}{\sin C}}$

よって　　$\sin C = \dfrac{2\sin 30°}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　ゆえに　　$C = 45°$，$135°$

(3)　△ABC の外接円の半径を R とする．

$$A=180°-(70°+50°)=60°$$

正弦定理により　$\dfrac{8}{\sin 60°}=2R$　　ゆえに　$R=\dfrac{8}{2\sin 60°}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$

(4)　正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 120°}=2\cdot 8$

よって　$a=2\cdot 8\sin 120°=8\sqrt{3}$

(5)　正弦定理により　$\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 5$

よって　$\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\cdot 5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　ゆえに　$A=60°,\ 120°$

第 9 問【余弦定理の使い方】

△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$b=3,\ c=2\sqrt{3},\ A=30°$ のとき　a

(2)　$a=\sqrt{2},\ b=5,\ C=135°$ のとき　c

(3)　$a=1,\ b=\sqrt{5},\ c=\sqrt{2}$ のとき　B

＜解＞

(1)　余弦定理により　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cos 30°$$

$$=3$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{3}$

(2)　余弦定理により　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=(\sqrt{2})^2+5^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cos 135°$$

$$=37$$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{37}$

(3)　余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$B=135°$

第 10 問【正弦の比と余弦定理】

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 6$ のとき，$\cos B$ の値を求めよ．

＜解＞

正弦定理により　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 6$

したがって，$a = 5k,\ b = 4k,\ c = 6k\ (k > 0)$ とおくことができる．

よって　$\cos B = \dfrac{(6k)^2 + (5k)^2 - (4k)^2}{2 \cdot 6k \cdot 5k} = \dfrac{45k^2}{2 \cdot 6 \cdot 5k^2} = \dfrac{3}{4}$

第 11 問【三角形と正弦定理・余弦定理１】

次のような △ABC の残りの辺と角をすべて求めよ．

(1)　$a = 2,\ b = 2\sqrt{3},\ c = 4$　　(2)　$a = \sqrt{2},\ c = 1 + \sqrt{3},\ B = 45^\circ$

(3)　$b = 3,\ c = 3\sqrt{3},\ B = 30^\circ$　　(4)　$a = 10,\ A = 45^\circ,\ C = 30^\circ$

＜解＞

(1)　余弦定理により　$\cos A = \dfrac{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$A = 30^\circ$

$\cos B = \dfrac{4^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$　　よって　$B = 60^\circ$

したがって　$C = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$

(2)　余弦定理により　$b^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ = 4$

$b > 0$ であるから　$b = \sqrt{4} = 2$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A} = \dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

よって　$\sin A = \dfrac{\sqrt{2} \sin 45^\circ}{2} = \dfrac{1}{2}$

$B = 45^\circ$ より $0^\circ < A < 135^\circ$ であるから　$A = 30^\circ$

したがって　$C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

(3)　正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin C}$

よって　$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}\sin 30^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より $0^\circ<C<150^\circ$ であるから　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

[1]　$C=60^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

三平方の定理により　$a=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$

[2]　$C=120^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

余弦定理により　$a^2=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}\cos 30^\circ=9$

$a>0$ であるから　$a=3$

以上から　$a=6,\ A=90^\circ,\ C=60^\circ$　または　$a=3,\ A=30^\circ,\ C=120^\circ$

(4)　$B=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$　よって　$c=\dfrac{10\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=5\sqrt{2}$

余弦定理により　$10^2=b^2+(5\sqrt{2})^2-2\cdot b\cdot 5\sqrt{2}\cos 45^\circ$

整理して　$b^2-10b-50=0$　これを解くと　$b=5\pm 5\sqrt{3}$

$b>0$ であるから　$b=5+5\sqrt{3}$

第 12 問【三角形と正弦定理・余弦定理２－角の二等分線含む問題】

$a=5,\ b=4,\ c=6$ である △ABC の辺 BC 上に，中点 M，BD$=4$ を満たす点 D，∠A の 2 等分線との交点 E をとる．AM，AD，AE の長さを求めよ．

＜解＞

$\cos B=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{3}{4}$

△ABM において，余弦定理により　$AM^2=6^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2\cdot6\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{79}{4}$

$AM>0$ であるから　$AM=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

△ABD において，余弦定理により　$AD^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\dfrac{3}{4}=16$

$AD>0$ であるから　$AD=4$

$BE:EC=AB:AC=6:4$ であるから　$BE=BC\times\dfrac{6}{6+4}=5\cdot\dfrac{6}{10}=3$

△ABE において，余弦定理により　$AE^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\dfrac{3}{4}=18$

$AE>0$ であるから　$AE=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

第 13 問【三角形の面積・外接円半径・内接円半径】

△ABC において，$a=14$，$b=15$，$c=13$ のとき，次の値を求めよ．
(1)　$\cos A$　　(2)　面積　　(3)　外接円の半径　　(4)　内接円の半径

＜解＞

(1)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{13^2+15^2-14^2}{2\cdot13\cdot15}=\dfrac{33}{65}$

(2)　(1) より　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{33}{65}\right)^2}=\dfrac{56}{65}$

よって，△ABC の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot13\cdot15\cdot\dfrac{56}{65}=84$

(3)　△ABC の外接円の半径を R とする．

正弦定理により　$\dfrac{14}{\sin A}=2R$　　よって　$R=\dfrac{7}{\sin A}=7\cdot\dfrac{65}{56}=\dfrac{65}{8}$

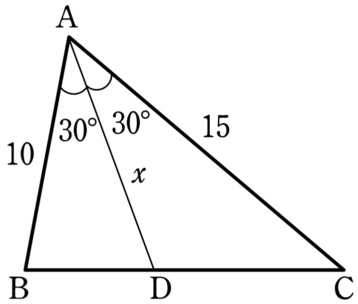
(4)　△ABC の内接円の半径を r とすると

$\dfrac{1}{2}r(13+14+15)=S=84$　　よって　$r=\dfrac{2\cdot84}{13+14+15}=4$

第 14 問【角の二等分線の長さを求める】

△ABC において，$b=15$，$c=10$，$A=60^\circ$ とする．∠A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とするとき，AD の長さを求めよ．

＜解＞



AD$=x$ とおく．

△ABC＝△ABD＋△ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 15\cdot x\sin 30^\circ$$

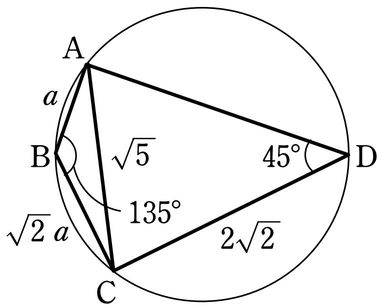
よって　$\dfrac{75\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{15}{4}x$

これを解くと　$x=6\sqrt{3}$　　したがって　AD$=6\sqrt{3}$

第 15 問【円に内接する四角形の問題】

円に内接する四角形 ABCD があり，CD$=2\sqrt{2}$，AB : BC$=1:\sqrt{2}$，∠D$=45^\circ$，対角線 AC$=\sqrt{5}$ であるとき，辺 AB，AD，対角線 BD の長さを求めよ．

＜解＞



AB$=a$ とすると，AB : BC$=1:\sqrt{2}$ より

BC$=\sqrt{2}\,a$

四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle B=180^\circ-\angle D=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

△ABC において，余弦定理により

$$(\sqrt{5})^2=a^2+(\sqrt{2}\,a)^2-2a\cdot\sqrt{2}\,a\cos 135^\circ$$

よって　$5=5a^2$　　ゆえに　$a^2=1$

$a>0$ であるから　$a=1$

AD$=b$，BD$=c$，∠BAD$=\theta$ とする．

$\triangle$ACD において，余弦定理により

$$(\sqrt{5})^2 = b^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot b \cdot 2\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

整理すると　$b^2 - 4b + 3 = 0$　　　よって　$(b-1)(b-3) = 0$　　　ゆえに　$b = 1,\ 3$

[1]　$b = 1$ のとき

　$\triangle$ABD において　　$c^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1\cos\theta$

　よって　　$c^2 = 2 - 2\cos\theta$　…… ①

　$\triangle$BCD において　　$c^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}\cos(180^\circ - \theta)$

　よって　　$c^2 = 10 - 8\cos(180^\circ - \theta)$

　ゆえに　　$c^2 = 10 + 8\cos\theta$　…… ②

　①×4＋② から　　$5c^2 = 18$　　　$c > 0$ であるから　　$c = \sqrt{\dfrac{18}{5}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

[2]　$b = 3$ のとき

　$\triangle$ABD において　　$c^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3\cos\theta$

　よって　　$c^2 = 10 - 6\cos\theta$　…… ③

　$\triangle$BCD において　　$c^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}\cos(180^\circ - \theta)$

　よって　　$c^2 = 10 + 8\cos\theta$　…… ④

　③×4＋④×3 から　　$7c^2 = 70$　　　$c > 0$ であるから　　$c = \sqrt{10}$

以上により

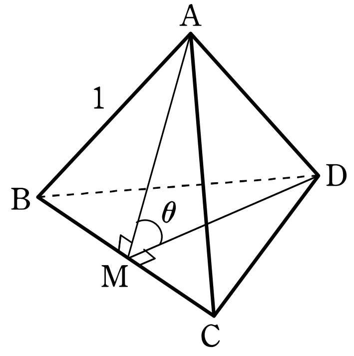
$$\mathrm{AB} = 1,\ \mathrm{AD} = 1,\ \mathrm{BD} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad \text{または} \quad \mathrm{AB} = 1,\ \mathrm{AD} = 3,\ \mathrm{BD} = \sqrt{10}$$

第 16 問【立体図形の問題 1 －四面体】

1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD がある．辺 BC の中点を M，$\angle$AMD を θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ．

<解>

AMとDMは辺BCと垂直であるから



$$AM = AB\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$DM = BD\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

△AMDにおいて，余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2AM \cdot DM}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

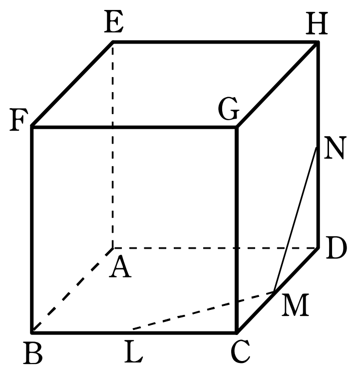
よって　　$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

第17問【立体図形の問題２－立方体】

1辺の長さ2の立方体ABCDEFGHにおいて辺BC，CD，DHの中点を，それぞれL，M，Nとする．

(1)　∠LMNの大きさを求めよ．

(2)　Dから平面LMNに下ろした垂線DHの長さを求めよ．



＜解＞

(1) $$\mathrm{LM}=\mathrm{MN}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

また，$\mathrm{CN}^2=2^2+1^2=5$ であるから

$$\mathrm{LN}=\sqrt{\mathrm{CL}^2+\mathrm{CN}^2}=\sqrt{1^2+5}=\sqrt{6}$$

△LMN に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{LMN}=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

よって　　$\angle\mathrm{LMN}=120^\circ$

(2) 三角錐 DLMN で △MDN を底面とみると，高さは 1 である．

よって，体積を V とすると　　$V=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)\times1=\dfrac{1}{6}$

一方，△LMN の面積を S とすると　　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$V=\dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}$ であるから　　$\mathrm{DH}=\dfrac{3V}{S}=3\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$