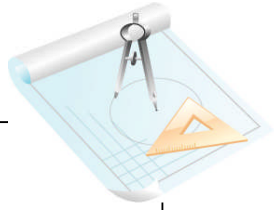
# 複素数と方程式・高次方程式

# 重要例題集　複素数と方程式・高次方程式



第 1 問【複素数の計算】

次の計算をせよ．

(1)　$(2-\sqrt{2}\,i)(2+\sqrt{2}\,i)$　　(2)　$(-3-\sqrt{3}\,i)^2$

(3)　$(2+i)^3+(2-i)^3$　　(4)　$\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\left(\dfrac{2}{i}+i\right)i^3$

(5)　$\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{2-3i}{3+2i}$　　(6)　$\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}$

＜解＞

(1)　(与式)$=2^2-(\sqrt{2}\,i)^2=4-2i^2=4+2=6$

別解　互いに共役な複素数の積であるから　　(与式)$=2^2+(\sqrt{2}\,)^2=6$

(2)　(与式)$=(-3)^2-2(-3)\sqrt{3}\,i+(-\sqrt{3}\,i)^2=9+6\sqrt{3}\,i+3i^2=(9-3)+6\sqrt{3}\,i$

$=6+6\sqrt{3}\,i$

(3)　(与式)$=2^3+3\cdot2^2i+3\cdot2i^2+i^3+(2^3-3\cdot2^2i+3\cdot2i^2-i^3)$

$=(8-6+8-6)+(12-1-12+1)i=4$

別解　$2+i=a$，$2-i=b$ とおくと　　$a+b=2\cdot2=4$，　$ab=2^2+1^2=5$

ゆえに　　(与式)$=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=4^3-3\cdot5\cdot4=64-60=4$

(4)　(与式)$=\left(\dfrac{1}{i}\cdot i-i^2\right)\left(\dfrac{2}{i}\cdot i+i^2\right)i=(1+1)(2-1)i=2i$

(5)　(与式)$=\dfrac{(2+3i)(3+2i)+(2-3i)(3-2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{6+4i+9i+6i^2+(6-4i-9i+6i^2)}{3^2+2^2}$

$=\dfrac{(6-6+6-6)+(4+9-4-9)i}{13}=0$

(6)　(与式)$=\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{2-4i+3i-6i^2}{1^2+2^2}+\dfrac{6i+2i^2}{3^2+1^2}$

$=\dfrac{(2+6)+(-4+3)i}{5}+\dfrac{-1+3i}{5}=\dfrac{7}{5}+\dfrac{2}{5}i$

第 2 問【複素数の実部と虚部】

次の等式を満たす実数 $x$，$y$ の値を求めよ．

(1)　$(x-2y)+(x-3)i=i$　　　(2)　$(2i+3)x+(2-3i)y=5-i$

＜解＞

(1)　$x$，$y$ が実数であるから，$x-2y$ と $x-3$ は実数である．

よって　$x-2y=0$，$x-3=1$　　これを解いて　$x=4$，$y=2$

(2)　左辺を整理すると　$(3x+2y)+(2x-3y)i=5-i$

$x$，$y$ が実数であるから，$3x+2y$ と $2x-3y$ は実数である．

よって　$3x+2y=5$，$2x-3y=-1$　　これを解いて　$x=1$，$y=1$

第 3 問【2 次方程式が虚数解をもつ条件】

2 つの 2 次方程式 $x^2+ax+a=0$，$x^2+ax+1=0$ が，ともに虚数解をもつように，定数 $a$ の値の範囲を定めよ．

＜解＞

2 つの 2 次方程式の判別式を，順に $D_1$，$D_2$ とすると

$$D_1=a^2-4a=a(a-4),\qquad D_2=a^2-4=(a+2)(a-2)$$

ともに虚数解をもつための条件は　$D_1<0$　かつ　$D_2<0$

すなわち　$0<a<4$　かつ　$-2<a<2$　　ゆえに　$0<a<2$

第 4 問【解と係数の関係と対称式の計算（2 次方程式）】

方程式 $3x^2-2x-8=0$ の 2 つの解が $\alpha$，$\beta$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　(2) $\alpha^2+\beta^2$　(3) $(\alpha-\beta)^2$　(4) $\alpha^3+\beta^3$　(5) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

＜解＞

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}$，　$\alpha\beta=-\dfrac{8}{3}$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{16}{9}$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\left(-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{52}{9}$

(3) (2) の結果を利用して

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=\frac{52}{9}-2\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{100}{9}$$

別解　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-4\left(-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{100}{9}$

(4) (1) の結果を利用して

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3(\alpha^2\beta+\beta^2\alpha)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\left(-\frac{16}{9}\right)=\frac{152}{27}$$

別解　(2) の結果を利用して

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\frac{2}{3}\left\{\frac{52}{9}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}=\frac{152}{27}$$

(5) (4) の結果を利用して

$$\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{\frac{152}{27}}{-\frac{8}{3}}=-\frac{19}{9}$$

第5問【$\alpha+2$，$\beta+2$ を解にもつ2次方程式を作る】

2次方程式 $x^2-2x+7=0$ の2つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする2次方程式を1つ求めよ.

＜解＞

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=7$

よって　$(\alpha+2)+(\beta+2)=\alpha+\beta+4=2+4=6$

$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=7+2\cdot2+4=15$

求める2次方程式の1つは

$$x^2-\{(\alpha+2)+(\beta+2)\}x+(\alpha+2)(\beta+2)=0$$

と書けるので，ゆえに

$$x^2-6x+15=0$$

第6問【2次方程式の解の条件から係数を決める】

次の条件を満たすように，定数 $k$ の値を定めよ.

(1)　2次方程式 $x^2+6x+k=0$ の1つの解が他の解の2倍である.

(2)　2次方程式 $x^2-(k-1)x+k=0$ の2つの解の比が $2:3$ である.

(3)　2次方程式 $x^2-2kx+k^2+2k+3=0$ の2つの解の差が2である.

＜解＞

(1)　条件から，2つの解を $\alpha$，$2\alpha$ とおく.

解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=-6$，$\alpha\cdot2\alpha=k$

よって　$\alpha=-2$，$2\alpha^2=k$　ゆえに　$k=2(-2)^2=8$

したがって　$k=\dfrac{1}{6}$，6

(2)　条件から，2 つの解を $2\alpha$，$3\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ とおく．

解と係数の関係から　$2\alpha+3\alpha=k-1$，　$2\alpha\cdot 3\alpha=k$

よって　$5\alpha=k-1$，　$6\alpha^2=k$

この 2 式から $k$ を消去すると　$6\alpha^2-5\alpha-1=0$

ゆえに　$(6\alpha+1)(\alpha-1)=0$　　よって　$\alpha=-\dfrac{1}{6}$，1

$\alpha=-\dfrac{1}{6}$ のとき　$k=\dfrac{1}{6}$，　$\alpha=1$ のとき　$k=6$

したがって　$k=\dfrac{1}{6}$，6

(3)　条件から，2 つの解を $\alpha$，$\alpha+2$ とおく．

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+2)=2k$　…… ①，　$\alpha(\alpha+2)=k^2+2k+3$　…… ②

① から　$\alpha=k-1$

これを ② に代入して　$(k-1)\{(k-1)+2\}=k^2+2k+3$

すなわち　$k^2-1=k^2+2k+3$　　よって　$k=-2$

第 7 問【整式の割り算】

| |
|---|
| $x$ の整式 $P(x)$ を，$x-2$ で割ると 5 余り，$x-3$ で割ると 9 余る．$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ． |

＜解＞

$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

$P(x)$ を $x-2$ で割ると 5 余り，$x-3$ で割ると 9 余るから　$P(2)=5$，$P(3)=9$

よって　$2a+b=5$，$3a+b=9$　　これを解いて　$a=4$，$b=-3$

ゆえに，求める余りは　$4x-3$

第 8 問【整式の割り算－3 次式で割る】

$x$ の整式 $P(x)$ は，$(x-1)^2$ で割ると $2x-3$ 余り，$x-2$ で割り切れる．
$P(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

＜解＞

$P(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，余りは 2 次以下の整式か 0 であり，更に $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x-3$ であることから

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+2x-3 \quad \cdots\cdots ①$$

とおける．

$P(x)$ が $x-2$ で割り切れるから　　$P(2)=0$

また，① から　　$P(2)=a+4-3=a+1$

ゆえに，$a+1=0$ から　　$a=-1$

したがって，求める余りは　　$-(x-1)^2+2x-3=-x^2+4x-4$

別解　$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+2x-3 \quad \cdots\cdots ①$$

$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから　　$P(2)=0$

また，① から　　$P(2)=Q_1(2)+4-3=Q_1(2)+1$

ゆえに，$Q_1(2)+1=0$ から　　$Q_1(2)=-1$

よって，$R(x)$ を整式として　$Q_1(x)=(x-2)R(x)-1$　と表される．

これを ① に代入して

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)^2\{(x-2)R(x)-1\}+2x-3\\&=(x-1)^2(x-2)R(x)-(x-1)^2+2x-3\\&=(x-1)^2(x-2)R(x)-x^2+4x-4\end{aligned}$$

ゆえに，求める余りは　　$-x^2+4x-4$

第 9 問【3 次方程式と因数定理】

次の方程式を解け．

(1)　$x^3-3x^2+2=0$　　(2)　$x^3+7x+8=0$

(3)　$3x^3+x^2-8x+4=0$　　(4)　$(x-1)(x-2)(x-3)=4\cdot3\cdot2$

<解>

(1)　$P(x)=x^3-3x^2+2$ とおくと　$\underline{P(1)=1-3+2=0}$

$\underline{P(x)\text{ を }x-1\text{ で割って因数分解すると}\quad P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)}$

$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$x^2-2x-2=0$

したがって　$x=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

(2)　$P(x)=x^3+7x+8$ とおくと　$\underline{P(-1)=-1-7+8=0}$

$\underline{P(x)\text{ を }x+1\text{ で割って因数分解すると}\quad P(x)=(x+1)(x^2-x+8)}$

$P(x)=0$ から　$x+1=0$　または　$x^2-x+8=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{31}\,i}{2}$

(3)　$P(x)=3x^3+x^2-8x+4$ とおくと　$\underline{P(1)=3+1-8+4=0}$

$P(x)$ を $x-1$ で割って因数分解すると

$$\underline{P(x)=(x-1)(3x^2+4x-4)=(x-1)(x+2)(3x-2)}$$

$P(x)=0$ から，次のいずれかが成り立つ．

$x-1=0,\quad x+2=0,\quad 3x-2=0$

したがって　$x=1,\ -2,\ \dfrac{2}{3}$

(4)　$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-4\cdot3\cdot2$ とおくと　$\underline{P(5)=4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2=0}$

$P(x)=x^3-6x^2+11x-30$ であるから，$P(x)$ を $x-5$ で割って因数分解すると

$$\underline{P(x)=(x-5)(x^2-x+6)}$$

$P(x)=0$ から　$x-5=0$　または　$x^2-x+6=0$

したがって　$x=5,\ \dfrac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

第 10 問【**3 次方程式の実数解の個数**】

3 次方程式 $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$ の異なる解は 2 つであるように，定数 $a$ の値を定めよ．

<解>

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+(a-4)x-a &= x(x^2+3x-4)+a(x-1) \\ &= x(x-1)(x+4)+a(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+4x+a) \end{aligned}$$

よって，方程式は　$(x-1)(x^2+4x+a)=0$

ゆえに　$x-1=0$　または　$x^2+4x+a=0$ ……①

題意を満たすとき，次の 2 つの場合が考えられる．

[1]　① が異なる 2 つの実数解をもち，その一方が 1 である．

[2]　① が 1 以外の重解をもつ．

[1] の場合　① は 1 を解にもつから　$1^2+4\cdot1+a=0$　よって　$a=-5$

このとき，① は　$(x+5)(x-1)=0$

ゆえに，$x=-5$，1 を解にもち，適する．

[2] の場合　① は重解をもつから，判別式 $D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=4-a$　よって　$4-a=0$　ゆえに　$a=4$

このとき，① は　$(x+2)^2=0$

よって，$x=-2$ を重解にもち，適する．

以上から　$a=-5$，4

第 11 問【解と係数の関係と対称式の計算（3 次方程式)】

3 次方程式 $x^3-3x+2=0$ の 3 つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(4)　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

＜解＞

(1)　$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ が方程式 $x^3-3x+2=0$ の解であるから

$$x^3-3x+2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

ゆえに　$x^3-3x+2=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

両辺の係数を比較して

$$\underline{\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\quad \alpha\beta\gamma=-2}$$

(2)　(与式)$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0^2-2\cdot(-3)=6$

(3)　(与式)$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=0+3\cdot(-2)=-6$

別解　$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は方程式 $x^3-3x+2=0$ の解であるから

$$\alpha^3-3\alpha+2=0,\quad \beta^3-3\beta+2=0,\quad \gamma^3-3\gamma+2=0$$

よって　$\alpha^3=3\alpha-2,\quad \beta^3=3\beta-2,\quad \gamma^3=3\gamma-2$

ゆえに　(与式)$=(3\alpha-2)+(3\beta-2)+(3\gamma-2)=3(\alpha+\beta+\gamma)-6$

$=3\cdot0-6=-6$

(4)　$\alpha+\beta+\gamma=0$ から　$\underline{\alpha+\beta=-\gamma,\quad \beta+\gamma=-\alpha,\quad \gamma+\alpha=-\beta}$

よって　(与式)$=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=2$

第 12 問【3 次方程式が $a+bi$ の虚数解をもつ条件から実数係数を決める】

3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ の 1 つの解が $3+2i$ であるとき，実数 $a$, $b$ の値と他の解を求めよ．

＜解＞

$3+2i$ が解で実数係数の方程式より，残りの解を$3-2i$と$\alpha$（実数）とおける．
解と係数の関係から，

$(3+2i)+(3-2i)+\alpha=5$
$(3+2i)(3-2i)+(3-2i)\alpha+\alpha(3+2i)=a$
$(3+2i)(3-2i)\alpha=b$

これを解いて

$a=7$，$b=13$，$\alpha=-1$

したがって，

$a=7$，$b=13$，他の解は　　$x=-1$，$3-2i$

別解　係数が実数の方程式であるから，$3+2i$ と共役な複素数 $3-2i$ も解である．
よって，$x^3-5x^2+ax+b$ は，$\{x-(3+2i)\}\{x-(3-2i)\}$　すなわち　$x^2-6x+13$ で割り切れる．
$(x^3-5x^2+ax+b)\div(x^2-6x+13)$ を計算すると，
商　$x+1$，　余り　$(a-7)x+b-13$　となるが，
割り切れるとき，余りは 0 であるから　　$(a-7)x+b-13=0$
これを $x$ の恒等式と考えて　　$a-7=0$，$b-13=0$　　　したがって　$a=7$，$b=13$
また，他の解は　　　　$x=-1$，$3-2i$

第 13 問【解から 3 次方程式を作る】

3 次方程式 $x^3-2x+1=0$ の 3 つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とする．
(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$，$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$，$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ の値を求めよ．
(2)　$2\alpha$，$2\beta$，$2\gamma$ を 3 つの解とする 3 次方程式を 1 つ作れ．

＜解＞

3 次方程式 $x^3-2x+1=0$ について，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\quad \alpha\beta\gamma=-1$$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0^2-2(-2)=4$

$\alpha+\beta+\gamma=0$ から　　$\beta+\gamma=-\alpha,\quad \gamma+\alpha=-\beta,\quad \alpha+\beta=-\gamma$

よって　$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=1$

また　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-0+(-2)-(-1)=0$

別解　題意により，次の等式が成り立つ．

$$x^3-2x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

両辺に $x=1$ を代入すると　　$1^3-2\cdot1+1=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

ゆえに　　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=0$

(2)　$2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=2\cdot0=0$

$2\alpha\cdot2\beta+2\beta\cdot2\gamma+2\gamma\cdot2\alpha=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=4(-2)=-8$

$2\alpha\cdot2\beta\cdot2\gamma=8\alpha\beta\gamma=8(-1)=-8$

よって，求める方程式は　　$x^3-8x+8=0$

## 第 14 問【1 の虚数解 ω の性質】

方程式 $x^2+x+1=0$ の 1 つの解を $\omega$ とするとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$1+\omega^2+\omega^4$　　(2)　$1+\omega^5+\omega^{10}$　　(3)　$1+\omega^6+\omega^9$

＜解＞

(1)　$\omega^3=1$ であるから　　$\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$

よって　　$1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$

(2)　$\omega^3=1$ であるから　　$\omega^5=\omega^3\cdot\omega^2=\omega^2,\quad \omega^{10}=(\omega^3)^3\omega=\omega$

よって　　$1+\omega^5+\omega^{10}=1+\omega^2+\omega=0$

(3)　$\omega^3=1$ であるから　　$\omega^6=(\omega^3)^2=1,\quad \omega^9=(\omega^3)^3=1$

よって　　$1+\omega^6+\omega^9=1+1+1=3$

第 15 問【相反（4 次）方程式】

4 次方程式 $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$ …… ① について

(1)　$x=0$ は ① の解でないことを示せ.

(2)　① の両辺を $x^2$ で割り，$t=x+\dfrac{1}{x}$ として ① を $t$ で表せ.

(3)　方程式 ① を解け.

＜解＞

(1)　① の左辺に $x=0$ を代入すると，$1=0$ となって矛盾が生じる.

よって，$x=0$ は ① の解ではない.

(2)　① の両辺を $x^2$ で割ると

$$x^2+5x+2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ であるから

$(t^2-2)+5t+2=0$　　　整理すると　$t^2+5t=0$

(3)　(2) から　$t(t+5)=0$　　　ゆえに　$t=0,\ -5$

[1]　$t=0$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=0$

ゆえに　$x^2+1=0$　　　よって　$x=\pm i$

[2]　$t=-5$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-5$

ゆえに　$x^2+5x+1=0$　　　よって　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

[1]，[2] から　$x=\pm i,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$