等式と不等式

重要例題集　等式と不等式

第 1 問【恒等式】

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ．

(1)　$x^3-ax-2=(x+1)(bx^2-x+c)$

(2)　$x^3+1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

＜解＞

(1)　右辺を展開して整理すると　　$x^3-ax-2=bx^3+(b-1)x^2+(c-1)x+c$

これが x についての恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$1=b$，$0=b-1$，$-a=c-1$，$-2=c$　　これを解いて　$a=3$，$b=1$，$c=-2$

別解　与えられた等式に $x=-1$，0，1，2 を代入すると，それぞれ

$$a-3=0,\quad -2=c,\quad -a-1=2(b+c-1),\quad -2a+6=3(4b+c-2)$$

これを解いて　　$a=3$，$b=1$，$c=-2$

逆に，このとき，与式は x についての恒等式である．

(2)　右辺を展開して整理すると

$$x^3+1=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$$

これが x についての恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$$1=a,\quad 0=3a+b,\quad 0=3a+2b+c,\quad 1=a+b+c+d$$

これを解いて　　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=0$

別解　与えられた等式に $x=-2$，-1，0，1 を代入すると，それぞれ

$$-7=-a+b-c+d,\quad 0=d,\quad 1=a+b+c+d,\quad 2=8a+4b+2c+d$$

これを解いて　　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=0$

逆に，このとき，与式は x についての恒等式である．

第 2 問【等式の証明－基本】

次の等式を証明せよ.

(1)　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b-c)^2$

(2)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

＜解＞

(1)　$(\text{右辺})=a^2-a(b+c)+\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$

$$=a^2-ab-ca+\frac{1}{4}\{(b^2+2bc+c^2)+3(b^2-2bc+c^2)\}$$

$$=a^2-ab-ca+(b^2-bc+c^2)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

よって，等式は成り立つ.

(2)　$(\text{左辺})=a^2b-ca^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$(\text{右辺})=(b^2c-bc^2)+(c^2a-ca^2)+(a^2b-ab^2)=a^2b-ca^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

よって，等式は成り立つ.

第 3 問【比例式を扱う 1】

(1)　$x:y=2:3$，$y:z=2:3$ のとき，$x:y:z$ を求めよ.

(2)　$a:b:c=2:3:4$，$a+b+c=36$ のとき，a，b，c の値を求めよ.

＜解＞

(1)　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$ から　$x=\dfrac{2}{3}y$，　$\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ から　$z=\dfrac{3}{2}y$

よって　$x:y:z=\dfrac{2}{3}y:y:\dfrac{3}{2}y=4:6:9$

(2)　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}=k$ とおくと　$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$

よって　$a+b+c=2k+3k+4k=9k$

条件より $a+b+c=36$ であるから　$9k=36$　ゆえに　$k=4$

したがって　$a=8$，$b=12$，$c=16$

第 4 問【比例式を扱う 2】

次のことが成り立つことを証明せよ.

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　[1] $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$　[2] $\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

(2) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　[1] $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$　[2] $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

＜解＞

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

[1] $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{bk-b}{b}=k-1,\quad \dfrac{c-d}{d}=\dfrac{dk-d}{d}=k-1$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

[2] $\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2},\quad \dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

よって　$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

(2) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$

[1] $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{ak+bk+ck}{a+b+c}=k,\quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{ak}{a}=k$

よって　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$

[2] $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=k^2$

$\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\dfrac{abk^2+bck^2+cak^2}{ab+bc+ca}=k^2$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

第５問【少なくとも１つは１であることを示す】

$x+y+z=1$, $xy+yz+zx=xyz$ のとき，x, y, z のうち少なくとも１つは１であることを証明せよ．

＜解＞

$$\underline{(x-1)(y-1)(z-1)}=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1$$
$$=xyz-xyz+1-1=\underline{0}$$

ゆえに　$x-1=0$　または　$y-1=0$　または　$z-1=0$

よって，x, y, z のうち少なくとも１つは１である．

$\boxed{\text{参考}}$ちなみに，実数 x, y, z がともに1であることを示すときは，

$$\underline{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0}$$

を示せばよい．

第６問【不等式の証明－平方利用】

次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つ場合についても調べよ．

(1)　$x^2+x+1 \geqq 3x$　　(2)　$x^2-2x+2>0$

(3)　$2x^2+3y^2 \geqq 4xy$　　(4)　$9x^2 \geqq y(6x-y)$

＜解＞

(1)　$\underline{(x^2+x+1)-3x}=(x-1)^2 \geqq 0$　　よって　$x^2+x+1 \geqq 3x$

等号が成り立つのは $x-1=0$ のとき，すなわち $x=1$ のときに限る．

(2)　$x^2-2x+2=\underline{(x-1)^2+1>0}$　　よって　$x^2-2x+2>0$

(3)　$\underline{(2x^2+3y^2)-4xy}=2(x-y)^2+y^2 \geqq 0$　　よって　$2x^2+3y^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは $x-y=0$, $y=0$ のとき，すなわち $x=y=0$ のときに限る．

(4)　$\underline{9x^2-y(6x-y)}=(3x-y)^2 \geqq 0$　　よって　$9x^2 \geqq y(6x-y)$

等号が成り立つのは $3x-y=0$ のとき，すなわち $3x=y$ のときに限る．

第 7 問【大小評価（不等式の証明）－因数分解利用】

$a<b$, $x<y$ のとき，$ax+by$, $bx+ay$ の大小関係を調べよ．

＜解＞

$(ax+by)-(bx+ay)=(a-b)(x-y)$

$a-b<0$, $x-y<0$ であるから　　$(a-b)(x-y)>0$

よって　　$ax+by>bx+ay$

第 8 問【大小評価（不等式の証明）－平方根含む式】

$a>0$, $b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$, $\dfrac{2ab}{a+b}$ の大小関係を調べよ．

＜解＞

$$\sqrt{ab}>0,\ \frac{2ab}{a+b}>0 \quad \cdots\cdots ①$$

また　　$(\sqrt{ab})^2-\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2=\dfrac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}\geqq 0$

よって　　$(\sqrt{ab})^2\geqq\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2$

① から　　$\sqrt{ab}\geqq\dfrac{2ab}{a+b}$

等号が成り立つのは $a=b$ のときに限る．

第 9 問【不等式の証明－平方根含む式２】

$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{9a+4b}$　　　(2)　$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

＜解＞

(1)　$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0$，$\sqrt{9a+4b}>0$　$\cdots\cdots$ ①

また　$(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{9a+4b})^2=12\sqrt{ab}>0$

ゆえに　$(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2>(\sqrt{9a+4b})^2$

① から　$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{9a+4b}$

(2)　$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}>0$，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$　$\cdots\cdots$ ①

また　$\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2 \geqq 0$

ゆえに　$\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$

① から　$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　（等号が成り立つのは $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ のとき，すなわち $a=b$ のときに限る．）

第 10 問【不等式の証明－絶対値記号を含む式１】

次の不等式を証明せよ．

(1)　$|a-b| \leqq |a|+|b|$　　　(2)　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

＜解＞

(1)　$-|a| \leqq a \leqq |a|$，$-|b| \leqq -b \leqq |b|$ であるから，辺々を加えて

$$-(|a|+|b|) \leqq a-b \leqq |a|+|b|$$

よって　$|a-b| \leqq |a|+|b|$

(2)　$-|a+b| \leqq a+b \leqq |a+b|$，$-|b| \leqq -b \leqq |b|$ であるから，辺々を加えて

$$-(|a+b|+|b|) \leqq a \leqq |a+b|+|b|$$

よって　$|a| \leqq |a+b|+|b|$　　　ゆえに　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

$\boxed{\text{別解}}$ (1) $|a-b| \geqq 0$, $|a|+|b| \geqq 0$ である.

また $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2=2(|ab|+ab) \geqq 0$

よって $|a-b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$ ゆえに $|a-b| \leqq |a|+|b|$

(2) $|a|-|b|<0$ のときは，不等式 $|a|-|b| \leqq |a+b|$ は明らかに成り立つ.

$|a|-|b| \geqq 0$ のとき $|a+b|^2-(|a|-|b|)^2=2(ab+|ab|) \geqq 0$

よって $(|a|-|b|)^2 \leqq |a+b|^2$

ゆえに $|a|-|b| \leqq |a+b|$ $\left(\begin{array}{l}(1),\ (2) \text{ において，等号が成り立つのは} \\ ab+|ab|=0,\ \text{すなわち } ab \leqq 0 \text{ のときに限る.}\end{array}\right)$

第 11 問【不等式の証明－絶対値記号を含む式２】

$|a|<1$, $|b|<1$ のとき，$|a+b|+|a-b|<2$ を証明せよ.

＜解＞

$|a|<1$, $|b|<1$ であるから $-1<a<1$, $-1<b<1$

これらの各辺に 2, -2 を掛けると

$$-2<2a<2,\quad -2<2b<2,\quad 2>-2a>-2,\quad 2>-2b>-2$$

が成り立つ．このことから

[1] $a+b \geqq 0$, $a-b \geqq 0$ のとき

$$|a+b|+|a-b|=(a+b)+(a-b)=2a<2$$

[2] $a+b \geqq 0$, $a-b<0$ のとき

$$|a+b|+|a-b|=(a+b)-(a-b)=2b<2$$

[3] $a+b<0$, $a-b \geqq 0$ のとき

$$|a+b|+|a-b|=-(a+b)+(a-b)=-2b<2$$

[4] $a+b<0$, $a-b<0$ のとき

$$|a+b|+|a-b|=-(a+b)-(a-b)=-2a<2$$

したがって $|a+b|+|a-b|<2$

第 12 問【相加・相乗平均の（大小）関係の使い方１－不等式の証明】

$a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $ab+\dfrac{1}{ab}\geqq 2$　　(2) $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 4$

＜解＞

(1) $ab>0$, $\dfrac{1}{ab}>0$ であるから

$$\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{ab}\right)\geqq\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=1$$

よって　$ab+\dfrac{1}{ab}\geqq 2$

（等号が成り立つのは $ab=\dfrac{1}{ab}$ のとき，すなわち，$a>0$, $b>0$ から $ab=1$ のときに限る．）

(2)
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$$

$\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$ であるから

$$2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$$

よって　$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 4$

（等号が成り立つのは $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$ のとき，すなわち，$a>0$, $b>0$ から $a=b$ のときに限る．）

第 13 問【相加・相乗平均の（大小）関係の使い方２－最小値を求める】

$a>0$, $b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)$ の最小値を求めよ

＜解＞

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{3}{a}\right)=5+ab+\frac{6}{ab}$$

ここで，$ab>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$ab+\frac{6}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{6}{ab}}=2\sqrt{6}$$

よって　$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)\geqq 5+2\sqrt{6}$

等号が成り立つのは $ab=\dfrac{6}{ab}$ のとき，すなわち $ab=\sqrt{6}$ のときで，この式を満たす a, b は存在する．ゆえに，求める最小値は　$5+2\sqrt{6}$

第 14 問【不等式の証明－有名問題】

$\lvert a\rvert<1$，$\lvert b\rvert<1$，$\lvert c\rvert<1$ のとき，次の不等式を証明せよ． (1)　$a+b<ab+1$　　　　(2)　$a+b+c<abc+2$

＜解＞

(1)

$$(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$$
$$=(a-1)(b-1)$$

$\lvert a\rvert<1$，$\lvert b\rvert<1$ から　　$-1<a<1$，$-1<b<1$

よって　　$a-1<0$，$b-1<0$

ゆえに　　$(a-1)(b-1)>0$　　　したがって　　$a+b<ab+1$

(2)　(1) の不等式の両辺に c を加えると

$$(a+b)+c<(ab+1)+c=(ab+c)+1$$

$\lvert a\rvert<1$，$\lvert b\rvert<1$ から　　$\lvert ab\rvert<1$

また，$\lvert c\rvert<1$ であるから，(1) を利用して

$$(ab+c)+1<(abc+1)+1=abc+2$$

したがって　　$a+b+c<abc+2$