図形と方程式

重要例題集　図形と方程式

第 1 問【2 点間の距離】

次の 2 点間の距離を求めよ．
(1)　(0，0)，(−12，−5)　　(2)　(2，3)，(7，5)　　(3)　(1，−2)，(−3，4)

＜解＞

(1)　$\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13$　　(2)　$\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$

(3)　$\sqrt{(-3-1)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

第 2 問【内分点・外分点】

2 点 A $(-3,\ 2)$，B $(4,\ -8)$ を結ぶ線分 AB に対して，次の点の座標を求めよ．
(1)　中点　　(2)　3 : 1，2 : 3 の比に，それぞれ内分する点
(3)　3 : 1，2 : 3 の比に，それぞれ外分する点

＜解＞

(1)　中点の座標は　$\left(\dfrac{-3+4}{2},\ \dfrac{2+(-8)}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{1}{2},\ -3\right)$

(2)　3 : 1 の比に内分する点の座標は

$\left(\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot4}{3+1},\ \dfrac{1\cdot2+3\cdot(-8)}{3+1}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{9}{4},\ -\dfrac{11}{2}\right)$

2 : 3 の比に内分する点の座標は

$\left(\dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot4}{2+3},\ \dfrac{3\cdot2+2\cdot(-8)}{2+3}\right)$　すなわち　$\left(-\dfrac{1}{5},\ -2\right)$

(3)　3 : 1 の比に外分する点の座標は

$\left(\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot4}{3-1},\ \dfrac{-1\cdot2+3\cdot(-8)}{3-1}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{15}{2},\ -13\right)$

2 : 3 の比に外分する点の座標は

$\left(\dfrac{-3\cdot(-3)+2\cdot4}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot2+2\cdot(-8)}{2-3}\right)$　すなわち　$(-17,\ 22)$

第 3 問【三角形の重心座標】

次の 3 点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ.
(1)　$(-1,\ 0)$, $(1,\ 2\sqrt{3})$, $(2,\ \sqrt{3})$　　　(2)　$(-1,\ -1)$, $(1,\ 1)$, $(-1,\ 3)$

＜解＞

(1)　$\left(\dfrac{-1+1+2}{3},\ \dfrac{0+2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{2}{3},\ \sqrt{3}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{-1+1+(-1)}{3},\ \dfrac{-1+1+3}{3}\right)$　すなわち　$\left(-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$

第 4 問【直線の方程式】

次の直線の方程式を求めよ.
(1)　点 $(-1,\ 2)$ を通り，傾きが 3　　　(2)　点 $(2,\ 1)$ を通り，傾きが -2
(3)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，x 軸に垂直　　　(4)　点 $(1,\ 3)$ を通り，x 軸に平行
(5)　2 点 $(2,\ -6)$, $(6,\ 2)$ を通る　　　(6)　2 点 $(1,\ 5)$, $(1,\ 3)$ を通る

＜解＞

(1)　$y-2=3\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=3x+5$

(2)　$y-1=-2(x-2)$　すなわち　$y=-2x+5$

(3)　$x=-2$

(4)　$y=3$

(5)　$y-(-6)=\dfrac{2-(-6)}{6-2}(x-2)$　すなわち　$y=2x-10$

(6)　2 点の x 座標がともに 1 であるから，求める直線の方程式は　$x=1$

第 5 問【2 直線の平行・垂直条件】

次の直線の方程式を求めよ．
(1)　点 $(6,\ 4)$ を通り，次の直線に平行な直線，垂直な直線
（ア）　$y=3x+2$　　（イ）　$y=-1$　　（ウ）　$x=2$
(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $3x-5y-12=0$ に平行な直線，垂直な直線

＜解＞

(1)　（ア）　直線 $y=3x+2$ の傾きは　3

[1]　平行な直線の方程式は

$y-4=3(x-6)$　　すなわち　　$y=3x-14$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$3m=-1$　　よって　　$m=-\dfrac{1}{3}$

ゆえに，求める垂直な直線の方程式は

$y-4=-\dfrac{1}{3}(x-6)$　　すなわち　　$y=-\dfrac{1}{3}x+6$

（イ）　平行な直線の方程式は　$y=4$　　垂直な直線の方程式は　$x=6$

（ウ）　平行な直線の方程式は　$x=6$　　垂直な直線の方程式は　$y=4$

(2)　直線 $3x-5y-12=0$ の傾きは　$\dfrac{3}{5}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-3=\dfrac{3}{5}(x+2)$　　すなわち　　$3x-5y+21=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$\dfrac{3}{5}m=-1$　　よって　　$m=-\dfrac{5}{3}$

ゆえに，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{5}{3}(x+2)$　　すなわち　　$5x+3y+1=0$

第 6 問【直線に関して対称な点を作る】

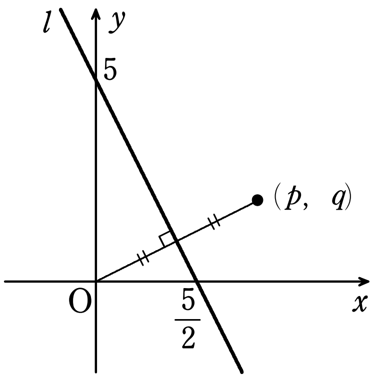
次の直線 l に関して，与えられた点と対称な点の座標を求めよ．

(1)　l : $y=-2x+5$，原点　　　　(2)　l : $y=3x-1$，点 $(2,\ 3)$

＜解＞

求める点の座標を $(p,\ q)$ とする．

(1)　原点と点 $(p,\ q)$ を通る直線が l に垂直であるから，



その傾きについて　　$-2\cdot\dfrac{q}{p}=-1$

よって　　$p-2q=0$　…… ①

また，原点と点 $(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点 $\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ が l 上にあるから

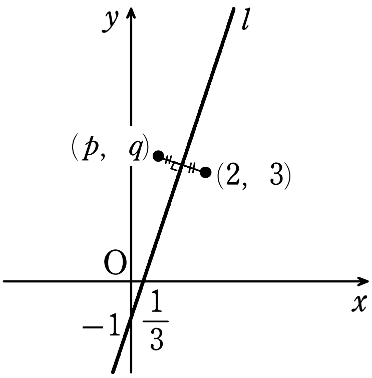
$$\frac{q}{2}=-2\cdot\frac{p}{2}+5$$

よって　　$2p+q=10$　…… ②

①，② を解いて　　$p=4,\ q=2$

ゆえに，求める点の座標は　　$(4,\ 2)$

(2)　2 点 $(2,\ 3)$，$(p,\ q)$を通る直線が l に垂直であるから，



その傾きについて

$$3\cdot\frac{q-3}{p-2}=-1$$

よって　　$p+3q=11$　…… ①

また，2 点 $(2,\ 3)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+3}{2}\right)$ が l 上にあるから

$$\frac{q+3}{2}=3\cdot\frac{p+2}{2}-1$$

よって　　$3p-q=-1$　…… ②

①，② を解いて　　$p=\dfrac{4}{5},\ q=\dfrac{17}{5}$

ゆえに，求める点の座標は　　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{17}{5}\right)$

第 7 問【三角形を作らない 3 直線】

3 直線 $x+3y=2$，$x+y=0$，$ax-2y=-4$ が三角形を作らないような，定数 a の値を求めよ．

＜解＞

$x+3y=2$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y=-4$ ……③ とする．

① の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　② の傾きは -1，　③ の傾きは $\dfrac{a}{2}$

よって，3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないとき，次の 2 つの場合がある．

[1] ③ が ① または ② と平行になる．

③ が ① と平行になるとき　$\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$a=-\dfrac{2}{3}$

③ が ② と平行になるとき　$\dfrac{a}{2}=-1$　ゆえに　$a=-2$

[2] 3 直線が 1 点で交わる．

①，② を連立して解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は　$(-1,\ 1)$

③ が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき

$a\cdot(-1)-2\cdot1=-4$　よって　$a=2$

以上から，求める a の値は　$a=-\dfrac{2}{3}$，-2，2

第 8 問【直線が通る定点】

k を定数とする．直線 $(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ は，k の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

＜解＞

$(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ ……①　とおく．

① を k について整理すると　$(x+2y-5)k+(2x-3y+4)=0$

よって，直線 ① は 2 直線 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ の交点を通る．

連立方程式 $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ を解くと　$x=1$，$y=2$

したがって，直線 ① は k の値に関係なく定点 $(1,\ 2)$ を通る．

第 9 問【折れ線 PA+PB の長さの最小値】

2 点 A (3, 0), B (3, 2) と直線 l : $x+y-1=0$ がある.

(1) 直線 l に関して, 点 A と対称な点 A′ の座標を求めよ.

(2) PA＋PB を最小にするような l 上の点 P の座標を求めよ.

＜解＞

(1) A′ の座標を $(p,\ q)$ とする.

直線 AA′ が直線 l に垂直であるから, その傾きについて

$$-1\cdot\frac{q-0}{p-3}=-1 \qquad \text{よって} \qquad p-q=3 \quad \cdots\cdots ①$$

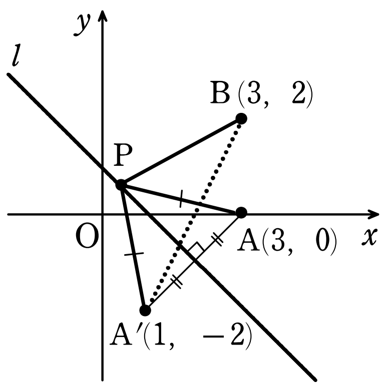
また, 線分 AA′ の中点 $\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ が直線 l 上にあるから

$$\frac{p+3}{2}+\frac{q}{2}-1=0 \qquad \text{よって} \qquad p+q=-1 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② を解いて　$p=1,\ q=-2$　したがって, 点 A′ の座標は　$(1,\ -2)$

(2) PA＝PA′ であるから

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=\mathrm{PA}'+\mathrm{PB}$$



よって, PA＋PB が最小になるのは, 3 点 A′, P, B が一直線上にあるとき, すなわち点 P が直線 l と直線 A′B の交点となるときである.

直線 A′B の方程式は

$$y+2=\frac{2+2}{3-1}(x-1)$$

すなわち　$y=2x-4$

連立方程式 $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=2x-4 \end{cases}$ を解くと　$x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3}$

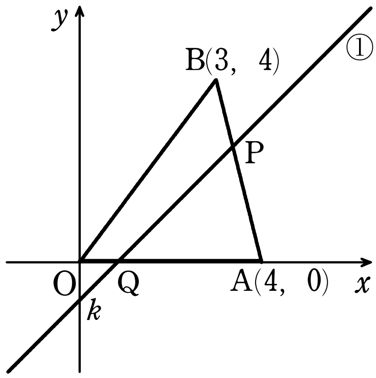
ゆえに, 求める点 P の座標は　$\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

第 10 問【三角形の面積を 2 等分する直線】

3 点 O $(0,\ 0)$，A $(4,\ 0)$，B $(3,\ 4)$ を頂点とする △OAB の面積を直線 $y=x+k$ が 2 等分するとき，定数 k の値を求めよ．

＜解＞

$y=x+k$ ……① とおく．



△OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$

直線①がこの面積を 2 等分するとき，①は辺 OA (ただし，端点 O，A を除く) と交わる．

①が点 O を通るとき　$k=0$

①が点 A を通るとき　$k=-4$

よって　$-4<k<0$ ……②

①と辺 AB との交点を P，辺 OA との交点を Q とする．

直線 AB の方程式は　$y-0=\dfrac{4-0}{3-4}(x-4)$　すなわち　$y=-4x+16$ ……③

①，③を連立して解くと　$x=\dfrac{16-k}{5}$，$y=\dfrac{16+4k}{5}$

よって，点 P の座標は　$\left(\dfrac{16-k}{5},\ \dfrac{16+4k}{5}\right)$

また，点 Q の座標は　$(-k,\ 0)$

ゆえに　$\triangle \mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\{4-(-k)\}\cdot\dfrac{16+4k}{5}=\dfrac{2(4+k)^2}{5}$

条件を満たすとき，$\triangle \mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{OAB}$ であるから　$\dfrac{2(4+k)^2}{5}=\dfrac{1}{2}\cdot 8$

したがって　$4+k=\pm\sqrt{10}$　よって　$k=-4\pm\sqrt{10}$

②を満たすのは　$k=-4+\sqrt{10}$

第 11 問【円の方程式】

次の円の方程式を求めよ.

(1)　円 $x^2+y^2-3x+5y-1=0$ と中心が同じで，点 $(1,\ 2)$ を通る円

(2)　点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ と対称な円

(3)　x 軸上に中心があって，2 点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通る円

(4)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ で点 $(2,\ 1)$ を通る円

(5)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸および y 軸に接する円

＜解＞

(1)　$x^2+y^2-3x+5y-1=0$ を変形すると　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{19}{2}$

よって，求める円の方程式は　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=r^2$　とおける.

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2+\frac{5}{2}\right)^2=r^2 \qquad \text{ゆえに} \qquad r^2=\frac{41}{2}$$

したがって，求める円の方程式は　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{41}{2}$

$\boxed{\text{別解}}$　求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x+5y+n=0$　とおける.

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$1^2+2^2-3\cdot1+5\cdot2+n=0 \qquad \text{よって} \qquad n=-12$$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x+5y-12=0$

(2)　点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と対称な点の座標を $(p,\ q)$ とすると

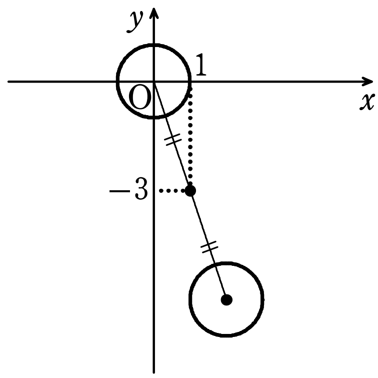
$$\frac{p}{2}=1,\ \ \frac{q}{2}=-3$$

よって　　$p=2,\ q=-6$

求める円は，中心 $(p,\ q)$，半径 1 の円であるから，

その方程式は

$$(x-2)^2+(y+6)^2=1$$



(3)　中心が x 軸上にあるから，求める円の方程式は　$(x-a)^2+y^2=r^2$　とおける．

これが 2 点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通るから　　$(3-a)^2+25=r^2$，$(-3-a)^2+49=r^2$

この 2 式から r^2 を消去して　　　$(3-a)^2+25=(-3-a)^2+49$

よって　　$a=-2$　　　このとき　$r^2=50$

ゆえに，求める円の方程式は　　$(x+2)^2+y^2=50$

(4)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ であるから，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-a)^2=13$$

とおける．これが点 $(2,\ 1)$ を通るから　　$(2-a)^2+(1-a)^2=13$

よって　　$a^2-3a-4=0$　　　これを解いて　　$a=-1,\ 4$

したがって，求める円の方程式は　　$(x+1)^2+(y+1)^2=13$，$(x-4)^2+(y-4)^2=13$

(5)　x 軸，y 軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通るから，円の中心は第 1 象限にある．

円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると，$a>0$，$b>0$ で　　　$a=b=r$

よって，円の方程式は　　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

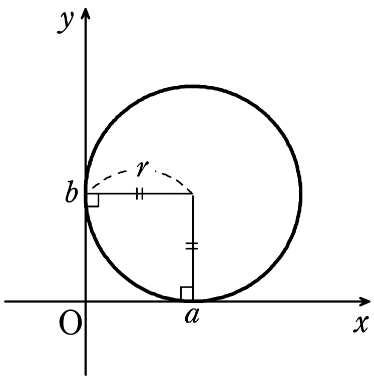
これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$$

ゆえに　　　$r^2-6r+5=0$

これを解いて　　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は　　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$



第 12 問【円の接線】

次の点から与えられた円に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ．

(1)　$(4,\ 2)$　$x^2+y^2=4$　　　　　(2)　$(-2,\ 4)$　$x^2+y^2=10$

＜解＞

(1)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする．

点 P は円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから　　$x_1{}^2+y_1{}^2=4$ …… ①

点 P における接線の方程式は　　$x_1x+y_1y=4$ …… ②

これが点 $(4,\ 2)$ を通るから

$4x_1+2y_1=4$　　よって　　$y_1=2-2x_1$ …… ③

③ を ① に代入して　　$x_1{}^2+(2-2x_1)^2=4$

ゆえに　　$5x_1{}^2-8x_1=0$　　これを解いて　　$x_1=0,\ \dfrac{8}{5}$

[1]　$x_1=0$ のとき，③ から　　$y_1=2$

よって，接点の座標は　　$(0,\ 2)$

接線の方程式は，② から

$0\cdot x+2\cdot y=4$　　すなわち　　$y=2$

[2]　$x_1=\dfrac{8}{5}$ のとき，③ から　　$y_1=-\dfrac{6}{5}$

よって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

接線の方程式は，② から

$\dfrac{8}{5}\cdot x+\left(-\dfrac{6}{5}\right)\cdot y=4$　　すなわち　　$4x-3y=10$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする．

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから　　$x_1{}^2+y_1{}^2=10$ …… ①

点 P における接線の方程式は　　$x_1x+y_1y=10$ …… ②

これが点 $(-2,\ 4)$ を通るから

$-2x_1+4y_1=10$　　よって　　$x_1=2y_1-5$ …… ③

③ を ① に代入して　　$(2y_1-5)^2+y_1{}^2=10$

ゆえに　　$y_1{}^2-4y_1+3=0$　　これを解いて　　$y_1=1,\ 3$

[1]　$y_1=1$ のとき，③ から　　$x_1=-3$

よって，接点の座標は　　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，② から

$-3\cdot x+1\cdot y=10$　　すなわち　　$-3x+y=10$

[2]　$y_1=3$ のとき，③ から　　$x_1=1$

よって，接点の座標は　　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，② から

$1\cdot x+3\cdot y=10$　　すなわち　　$x+3y=10$

第 13 問【円と直線の位置関係－判別式利用】

円 $x^2+y^2=1$ と次の直線の位置関係（異なる 2 点で交わる，接する，共有点をもたない）を調べよ．また，共有点のあるときは，その座標を求めよ．

(1)　$x-y=1$　　(2)　$x+y=\sqrt{2}$　　(3)　$2x+3y=6$

＜解＞

(1)　$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x-y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$y=x-1 \cdots\cdots ③$

これを ① に代入して　$x^2+(x-1)^2=1$

よって　$x^2-x=0$　これを解いて　$x=0,\ 1$

③ から　$x=0$ のとき $y=-1$，　$x=1$ のとき $y=0$

よって，円 ① と直線 ② は異なる 2 点 $(0,\ -1)$，$(1,\ 0)$ で交わる．

(2)　$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x+y=\sqrt{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$y=-x+\sqrt{2} \cdots\cdots ③$

これを ① に代入して　$x^2+(-x+\sqrt{2})^2=1$

よって　$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$　ゆえに　$(\sqrt{2}x-1)^2=0$

したがって　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ から　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，円 ① と直線 ② は点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で接する．

(3)　$\begin{cases} x^2+y^2=1 \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=6 \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$y=-\dfrac{2}{3}x+2 \cdots\cdots ③$

これを ① に代入して　$x^2+\left(-\dfrac{2}{3}x+2\right)^2=1$

よって　$13x^2-24x+27=0$

この 2 次方程式について　$\dfrac{D}{4}=(-12)^2-13\cdot27=-207<0$

ゆえに，円 ① と直線 ② は共有点をもたない．

第 14 問【円が直線から切り取る弦の長さ－点と直線の距離利用】

次の円が直線 $4x+3y-5=0$ から切り取る弦の長さと，中点の座標を求めよ．

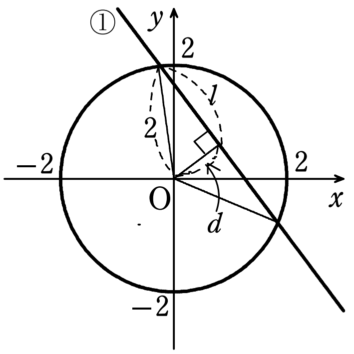
(1)　$x^2+y^2=4$　　　　(2)　$x^2+y^2+4x-2y-1=0$

＜解＞

$4x+3y-5=0$ …… ①　とおく．

(1)　円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離 d は

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$



円の半径は 2 であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=2^2-d^2=4-1=3$$

$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{3}$

よって，弦の長さは　　$2l=2\sqrt{3}$

円の中心 $(0,\ 0)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は　　$y=\dfrac{3}{4}x$　　すなわち　　$3x-4y=0$ …… ②

2 直線 ①，② の交点が弦の中点である．

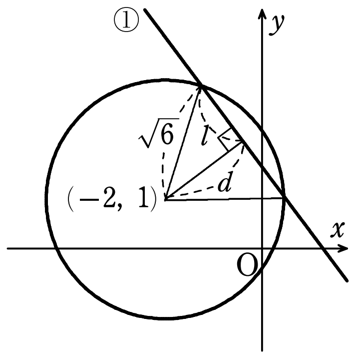
①，② を連立して解くと　　$x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{3}{5}$

よって，弦の中点の座標は　　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

(2)　円の方程式を変形すると　　$(x+2)^2+(y-1)^2=6$

円の中心 $(-2,\ 1)$ と直線 ① の距離 d は

$$d=\frac{|4(-2)+3\cdot1-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$



円の半径は $\sqrt{6}$ であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=(\sqrt{6})^2-d^2=6-4=2$$

$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{2}$

よって，弦の長さは　　$2l=2\sqrt{2}$

円の中心 $(-2,\ 1)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{4}(x+2)\qquad \text{すなわち}\qquad 3x-4y+10=0 \text{ …… ③}$$

2 直線 ①，③ の交点が弦の中点である．

①，③ を連立して解くと　　$x=-\dfrac{2}{5}$，$y=\dfrac{11}{5}$

よって，弦の中点の座標は　　$\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$

第 15 問【2 円の位置関係】

次の 2 円の位置関係 (異なる 2 点で交わる，接する，共有点がない) を調べよ.

(1)　$(x-2)^2+y^2=9$，$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

(2)　$x^2+y^2=16$，$x^2+y^2+2x-2y-2=0$

(3)　$x^2+y^2-2x=0$，$x^2+y^2-8x-8y+16=0$

＜解＞

(1) ～ (3) において，与えられた 2 円を順に ①，② とする．また，2 円 ①，② の中心間の距離を d，円 ① の半径を r_1，円 ② の半径を r_2 とする.

(1)　円 ① の中心は (2，0)，円 ② の中心は (1，1)

よって　　$d=\sqrt{(1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

また，$r_1=3$，$r_2=2$ であるから　　$r_1-r_2=1$，$r_1+r_2=5$

ゆえに　　$\underline{r_1-r_2<d<r_1+r_2}$

したがって，2 円は異なる 2 点で交わる.

(2)　円 ② の方程式を変形すると　　$(x+1)^2+(y-1)^2=4$

円 ① の中心は (0，0)，円 ② の中心は $(-1,\ 1)$

よって　　$d=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

また，$r_1=4$，$r_2=2$ であるから　　$r_1-r_2=2$

ゆえに　　$\underline{d<r_1-r_2}$

したがって，2 円は共有点がない (円 ② は円 ① の内部にある).

(3)　円 ① の方程式を変形すると　　$(x-1)^2+y^2=1$

円 ② の方程式を変形すると　　$(x-4)^2+(y-4)^2=16$

円 ① の中心は (1，0)，円 ② の中心は (4，4)

よって　　$d=\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$

また，$r_1=1$，$r_2=4$ であるから　　$r_1+r_2=5$

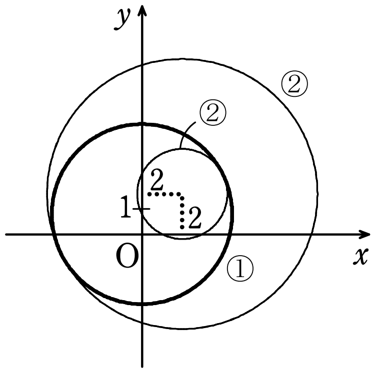
ゆえに　　$\underline{d=r_1+r_2}$

したがって，2 円は接する (外接する).

第 16 問【円に接する円】

中心が点 $(2,\ 2)$ で，円 $x^2+y^2-2y-19=0$ に接する円の方程式を求めよ．

＜解＞



$x^2+y^2-2y-19=0$ を変形すると

$$x^2+(y-1)^2=20 \quad \cdots\cdots ①$$

これは中心が $(0,\ 1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の円を表す．

求める円の半径を r とすると，中心が $(2,\ 2)$ であるから，円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$

2 円 ①，② の中心間の距離を d とすると

$$d=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

円 ② の中心 $(2,\ 2)$ は円 ① の内部にあるから，2円が接するのは次の 2 つの場合がある．

[1]　円 ② が円 ① に内接する．　　[2]　円 ① が円 ② に内接する．

[1] の場合　　$d=2\sqrt{5}-r$　　よって　　$r=\sqrt{5}$

[2] の場合　　$d=r-2\sqrt{5}$　　よって　　$r=3\sqrt{5}$

以上から，求める円の方程式は　　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$，$(x-2)^2+(y-2)^2=45$

第 17 問【2 円の交点を通る直線と円（円束)】

2 円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$，$x^2+y^2=4$ の交点を通り，原点を通る円の方程式を求めよ．また，2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ．

<解>

k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-2y+1)+(x^2+y^2-4)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す曲線は 2 円の 2 つの交点を通る．

[1]　曲線 ① が原点を通るとき

$$k\cdot 1-4=0 \qquad よって \qquad k=4$$

これを ① に代入して整理すると　$5x^2+5y^2-16x-8y=0$

これが求める円の方程式である．

[2]　曲線 ① が直線であるとき

x^2，y^2 の項の係数が 0 となることから　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　$4x+2y-5=0$

第 18 問【点の軌跡】

次のような点 P の軌跡を求めよ．

(1)　2 点 A$(-1,\ 5)$，B$(7,\ -1)$ から等距離にある点 P

(2)　2 点 A$(-3,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ からの距離の比が $1:3$ である点 P

<解>

動点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．

(1)　AP$=$BP であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(x+1)^2+(y-5)^2=(x-7)^2+(y+1)^2$

整理すると　$4x-3y-6=0$

ゆえに，点 P の軌跡は　直線 $4x-3y-6=0$

(2)　AP : BP$=1:3$ から　$3AP=BP$　よって　$9AP^2=BP^2$

ゆえに　$9\{(x+3)^2+y^2\}=(x-1)^2+y^2$

整理すると　$x^2+y^2+7x+10=0$

したがって，点 P の軌跡は　円 $\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

第 19 問【動点と作る点の軌跡（媒介変数－パラメーター利用）】

次のような点 P の軌跡を求めよ．

(1)　点 A (1, 3) と直線 $x-2y=1$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P

(2)　点 A (5, 0) と円 $(x+1)^2+y^2=16$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P

(3)　2 点 A (4, 0)，B (2, 3) と円 $x^2+y^2=1$ 上の点 Q を頂点とする三角形の重心 P

(4)　点 A (2, -2) と放物線 $y=x^2$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ を 1 : 2 の比に内分する点 P

＜解＞

P の座標を $(x,\ y)$，Q の座標を $(s,\ t)$ とする．

(1)　点 Q は直線 $x-2y=1$ 上にあるから　$s-2t=1$ …… ①

点 P は線分 AQ の中点であるから

$$x=\frac{1+s}{2},\quad y=\frac{3+t}{2}\qquad \text{ゆえに}\qquad s=2x-1,\ t=2y-3$$

これを ① に代入して　$(2x-1)-2(2y-3)=1$

よって　$x-2y=-2$

したがって，点 P の軌跡は　直線 $x-2y=-2$

(2)　点 Q は円 $(x+1)^2+y^2=16$ 上にあるから　$(s+1)^2+t^2=16$ …… ①

点 P は線分 AQ の中点であるから

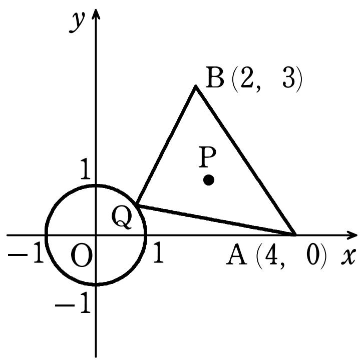
$$x=\frac{5+s}{2},\quad y=\frac{t}{2}\qquad \text{ゆえに}\qquad s=2x-5,\ t=2y$$

これを ① に代入して　$\{(2x-5)+1\}^2+(2y)^2=16$

よって　$(x-2)^2+y^2=4$

したがって，点 P の軌跡は　円 $(x-2)^2+y^2=4$

(3)　点 Q は直線 AB 上にないから，図形 ABQ は常に三角形になる．



点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから

$$s^2+t^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P は三角形 ABQ の重心であるから

$$x=\frac{4+2+s}{3},\quad y=\frac{0+3+t}{3}$$

ゆえに　$s=3x-6,\ t=3y-3$

これを ① に代入して　$(3x-6)^2+(3y-3)^2=1$

よって　$(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{9}$

したがって，点 P の軌跡は　円 $(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{9}$

(4)　点 Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから　　$t=s^2$ …… ①

点 P は線分 AQ を 1 : 2 の比に内分するから

$$x=\frac{2\cdot 2+1\cdot s}{1+2},\quad y=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot t}{1+2}\qquad \text{ゆえに}\qquad s=3x-4,\ t=3y+4$$

これを ① に代入して　　$3y+4=(3x-4)^2$

よって　　$y=3x^2-8x+4$

したがって，点 P の軌跡は　　放物線 $y=3x^2-8x+4$

第 20 問【2 交点で作る線分の中点の軌跡】

直線 $y=2x+k$ が放物線 $y=3x-x^2$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとする．

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を k で表せ．また，k の変域を求めよ．

(2)　k の値が変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

＜解＞

(1)　$y=2x+k$ …… ①，$y=3x-x^2$ …… ②　とする．

①，② から y を消去して整理すると　　$x^2-x+k=0$ …… ③

この 2 次方程式について　　$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot k=1-4k$

直線 ① と放物線 ② が異なる 2 点 P，Q で交わるための条件は

$$D>0\qquad \text{すなわち}\qquad 1-4k>0$$

よって，k の変域は　　$k<\frac{1}{4}$ …… ④

2 点 P，Q の x 座標を α，β $(\alpha \fallingdotseq \beta)$ とおくと，α，β は ③ の異なる 2 つの実数の解である．

解と係数の関係より　　$\alpha+\beta=1$

線分 PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots ⑤,\qquad Y=2X+k=k+1\ \cdots\cdots ⑥$$

したがって，M の座標は　　$\left(\frac{1}{2},\ k+1\right)$

(2)　⑥ から　　$k=Y-1$

　これを ④ に代入して　　$Y-1<\frac{1}{4}$　　　ゆえに　　$Y<\frac{5}{4}$

　これと ⑤ から，点 M の軌跡は　　直線 $x=\frac{1}{2}$ の $y<\frac{5}{4}$ の部分

第 21 問【2 直線の交点の軌跡】

> m の値が変化するとき，次の 2 直線の交点 P の軌跡を求めよ．
> $$mx-y+5m=0,\quad x+my-5=0$$

＜解＞

2 直線の方程式を変形して

$$y=m(x+5)\ \cdots\cdots ①\qquad -my=x-5\ \cdots\cdots ②$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，②を満たす．

[1]　$y\fallingdotseq 0$ のとき，② から　　$m=-\frac{x-5}{y}$

　これを ① に代入して　　$y=-\frac{x-5}{y}(x+5)$

　よって　　　　　　　$x^2+y^2=25\ \cdots\cdots ③$

　③ において $y=0$ とすると　　$x=\pm 5$

　ゆえに，$y\fallingdotseq 0$ のとき，点 P$(x,\ y)$ は円 ③ から 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を除いた図形上にある．

[2]　$y=0$ のとき，② から　　$x=5$

　$x=5$，$y=0$ を ① に代入すると　　$m=0$

　よって，点 $(5,\ 0)$ は，$m=0$ のときの 2 直線の交点である．

[1]，[2] から，点 P の軌跡は，円 $x^2+y^2=25$ から点 $(-5,\ 0)$ を除いた図形．

$\boxed{\text{参考}}$

> ① から第 1 の直線は定点 $(-5,\ 0)$ を通り，② から第 2 の直線は定点 $(5,\ 0)$ を通る．また，この 2 直線は垂直に交わるから，点 P は 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる．ただし，① は直線 $x=-5$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-5,\ 0)$ を除く．

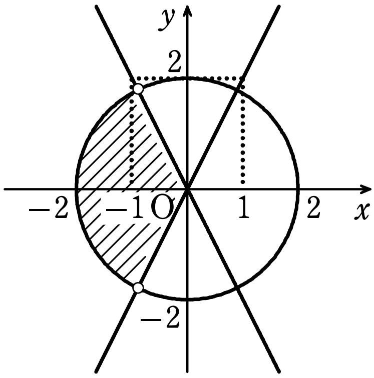
第 22 問【不等式の表す領域】

次の不等式，連立不等式の表す領域を図示せよ．
(1)　$x^2+y^2\leqq 4$，$y-2x>0$，$y+2x<0$　　　(2)　$y^2-4x^2\geqq 0$
(3)　$x^2-3xy+2y^2+y-1<0$

＜解＞

(1)　求める領域は〔図〕の斜線部分である．ただし，境界線は，2 直線 $y=2x$，$y=-2x$ 上の点を含まないで，他は含む．

(1)

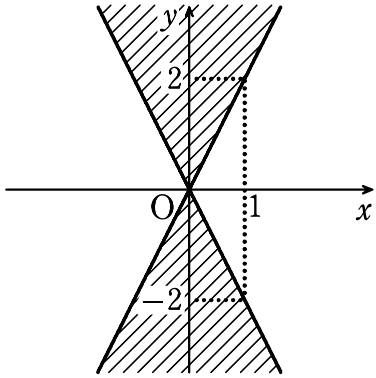


(2)　$y^2-4x^2\geqq 0$ から　　$(y+2x)(y-2x)\geqq 0$

よって　$\begin{cases} y+2x\geqq 0 \\ y-2x\geqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y+2x\leqq 0 \\ y-2x\leqq 0 \end{cases}$

ゆえに，求める領域は〔図〕の斜線部分である．
ただし，境界線上の点を含む．

(2)



(3)　$x^2-3xy+2y^2+y-1<0$ から

$$x^2-3xy+(y+1)(2y-1)<0$$

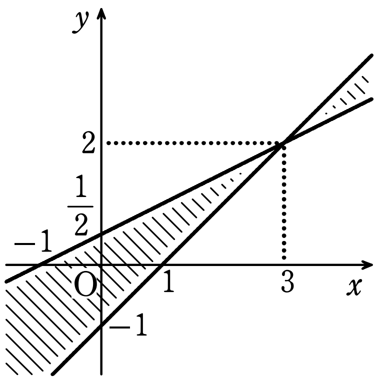
よって　$(x-y-1)(x-2y+1)<0$

したがって

$\begin{cases} x-y-1>0 \\ x-2y+1<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x-y-1<0 \\ x-2y+1>0 \end{cases}$

ゆえに，求める領域は〔図〕の斜線部分である．
ただし，境界線上の点を含まない．

(3)



第 23 問【絶対値記号を含む不等式の表す領域】

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$|x-y|\leqq 1$　　　　　　(2)　$|x|+2|y|<8$

＜解＞

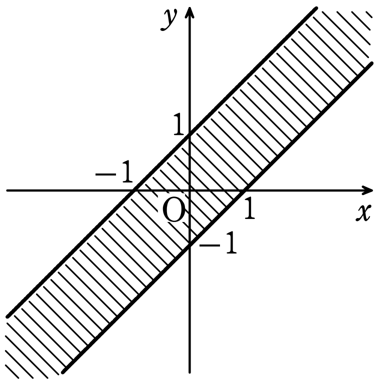
(1)　$|x-y|\leqq 1$ から　　$-1\leqq x-y\leqq 1$

よって　$\begin{cases} x-y\geqq -1 \\ x-y\leqq 1 \end{cases}$

ゆえに，求める領域は〔図〕の斜線部分である．

ただし，境界線上の点を含む．

(1)



(2)　$|x|+2|y|<8$ …… ①

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，① は　$x+2y<8$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき，① は　$x-2y<8$

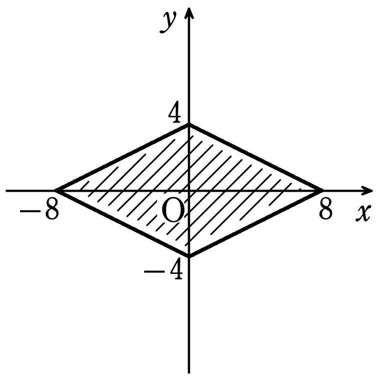
$x<0$，$y\geqq 0$ のとき，① は　$-x+2y<8$

$x<0$，$y<0$ のとき，① は　$-x-2y<8$

ゆえに，求める領域は〔図〕の斜線部分である．

ただし，境界線上の点を含まない．

(2)



第 24 問【正領域・負領域】

直線 $y=ax+b$ が 2 点 P$(1,\ -1)$，Q$(2,\ 1)$ の間を通るとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

＜解＞

条件を満たすのは，2 点 P，Q のうち，一方が直線 $y=ax+b$ の上方，他方が下方にあるときである．

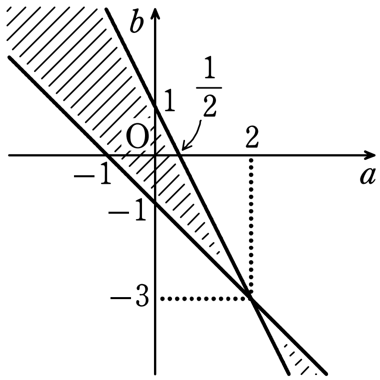
よって　$(-1>a\cdot1+b$ かつ $1<a\cdot2+b)$

　または　$(-1<a\cdot1+b$ かつ $1>a\cdot2+b)$

ゆえに

$$\begin{cases} a+b+1<0 \\ 2a+b-1>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a+b+1>0 \\ 2a+b-1<0 \end{cases}$$

したがって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は〔図〕の斜線部分である．ただし，境界線上の点を含まない．



第 25 問【線形計画法 1】

> 4 つの不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$2x+y\leqq5$，$x+3y\leqq6$ を満たす x，y の値に対して，$x+y$ のとる値の範囲を求めよ．

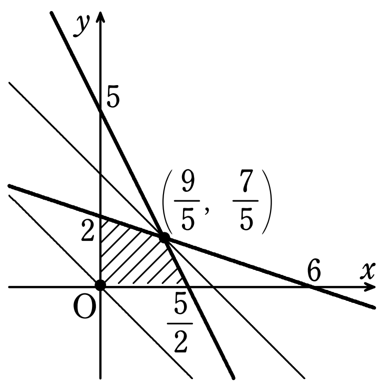
＜解＞

2 直線 $2x+y=5$，$x+3y=6$ の交点の座標は　$\left(\frac{9}{5},\ \frac{7}{5}\right)$

与えられた 4 つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は右図の斜線部分である．

ただし，境界線上の点を含む．

$x+y=k$ ……①　とおくと，① は y 切片が k で，傾き -1 の直線を表す．



図から，直線 ① が点 $\left(\frac{9}{5},\ \frac{7}{5}\right)$ を通るとき，k の値は最大となる．

このとき　$k=\frac{9}{5}+\frac{7}{5}=\frac{16}{5}$

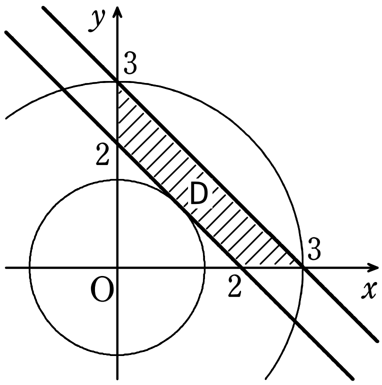
また，直線 ① が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる．このとき　$k=0$

以上から　$0\leqq k\leqq\frac{16}{5}$　すなわち　$0\leqq x+y\leqq\frac{16}{5}$

第 26 問【線形計画法２】

x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2 \leqq x+y \leqq 3$ を満たすとき，x^2+y^2 の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

＜解＞



与えられた連立不等式の表す領域を D とすると， D は右図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

$x^2+y^2=k^2$ …… ①（ただし，$k>0$）とおくと，① は原点を中心とし，半径 k の円を表す．

図から，円 ① が点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 3)$ を通るとき，k^2 の値は最大となる．

このとき　　$k^2=3^2+0^2=9$

また，円 ① が直線 $x+y=2$ …… ② に接するとき，k^2 の値は最小となる．

このとき，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離が，円の半径 k に等しいから

$$k=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2} \qquad \text{よって} \qquad k^2=2$$

また，接点は，原点から直線 ② に下ろした垂線 $y=x$ と直線 ② の交点である．

その座標は　　$(1,\ 1)$

したがって，x^2+y^2 は　　$x=3$，$y=0$ または $x=0$，$y=3$ のとき最大値 9，

$x=1$，$y=1$ のとき最小値 2 をとる．

注 x^2+y^2 は原点Oと領域上の点$(x\,,\,y)$との2点間の距離の平方と考えても良い．

第 27 問【通過領域】

(1)　a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 $y=x^2+ax+a^2$ が通らない領域を図示せよ．

(2)　t がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $tx+t^2y+1=0$ の通りうる領域を図示せよ．

＜解＞

(1)　$y=x^2+ax+a^2$ を a について整理すると

$$a^2+xa+x^2-y=0 \quad \cdots\cdots ①$$

放物線 $y=x^2+ax+a^2$ が点 $(x,\ y)$ を通らない条件は，方程式 ① を満たす実数 a が存在しないことである．

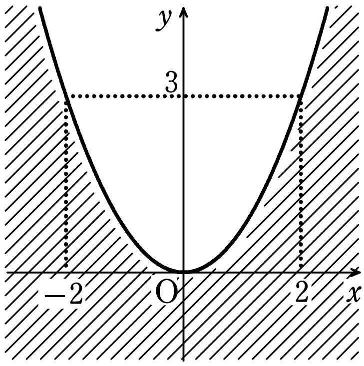
よって，a の 2 次方程式 ① について

$$D<0 \qquad すなわち \qquad x^2-4(x^2-y)<0$$

ゆえに　　$y<\dfrac{3}{4}x^2$

よって，求める領域は〔図〕の斜線部分．

ただし，境界線上の点を含まない．



(2)　$tx+t^2y+1=0$ を t について整理すると　　$yt^2+xt+1=0 \quad \cdots\cdots ①$

直線 $tx+t^2y+1=0$ が点 $(x,\ y)$ を通る条件は，方程式 ① を満たす実数 t が存在することである．

[1]　$y=0$ のとき

① は　　　$xt+1=0$

よって，$x \neq 0$ のとき，① を満たす実数 t が存在する．

[2]　$y \neq 0$ のとき

t の 2 次方程式 ① について

$$D \geqq 0 \qquad すなわち \qquad x^2-4y \geqq 0$$

よって　　$y \leqq \dfrac{1}{4}x^2$

[1]，[2] をまとめると

$$y=0,\ x \neq 0 \quad または \quad y \neq 0,\ y \leqq \frac{1}{4}x^2$$

よって，求める領域は〔図〕の斜線部分．

ただし，境界線上の点は，原点を除いて含む．