三角関数

重要例題集　三角関数

第 1 問【弧度法の計算】

次の角の度数はラジアンに，ラジアンは度数に，それぞれ書き直せ．

(1)　$30°$　　(2)　$45°$　　(3)　$210°$　　(4)　$72°$　　(5)　$420°$

(6)　$\dfrac{\pi}{3}$　　(7)　$\dfrac{11}{6}\pi$　　(8)　$\dfrac{\pi}{8}$　　(9)　$\dfrac{7}{12}\pi$　　(10)　2

＜解＞

(1)　$30\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{6}$　(ラジアン)

(2)　$45\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{4}$　(ラジアン)

(3)　$210\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{7}{6}\pi$　(ラジアン)

(4)　$72\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{5}\pi$　(ラジアン)

(5)　$420\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{7}{3}\pi$　(ラジアン)

(6)　$\dfrac{\pi}{3}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=60°$

(7)　$\dfrac{11}{6}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=330°$

(8)　$\dfrac{\pi}{8}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=22.5°$

(9)　$\dfrac{7}{12}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=105°$

(10)　$2\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=\left(\dfrac{360}{\pi}\right)^{\circ}$

第 2 問【扇形の弧の長さと面積】

次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ．

(1)　半径 4，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$　　　(2)　半径 2，中心角 $120°$

＜解＞

(1)　弧の長さは　$\underline{4\times\dfrac{3}{4}\pi=3\pi}$　　面積は　$\underline{\dfrac{1}{2}\times4^2\times\dfrac{3}{4}\pi=6\pi}$

(2)　$120°$ は $\dfrac{2}{3}\pi$ (ラジアン) であるから

弧の長さは　$\underline{2\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi}$　　面積は　$\underline{\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi}$

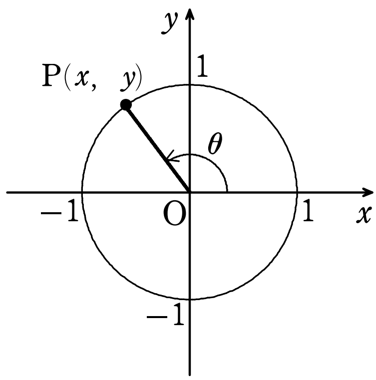
第 3 問【単位円と三角関数】

次の条件を満たす角 θ は，それぞれ第何象限の角か.

(1)　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$　　(2)　$\cos\theta > 0$，$\tan\theta < 0$　　(3)　$\sin\theta\cos\theta > 0$

＜解＞

θ を表す動径と単位円 $x^2+y^2=1$ の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると　　$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



(1)　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$ から　　$y > 0$，$x < 0$

よって，P は第 2 象限にあるから，θ は第 2 象限の角である.

(2)　$\cos\theta > 0$，$\tan\theta < 0$ から　　$x > 0$，$\dfrac{y}{x} < 0$

よって　　$x > 0$，$y < 0$

ゆえに，P は第 4 象限にあるから，θ は第 4 象限の角である.

(3)　$\sin\theta\cos\theta > 0$ から　　$xy > 0$

よって　　$x > 0$，$y > 0$ または $x < 0$，$y < 0$

ゆえに，P は第 1 象限または第 3 象限にある.

したがって，θ は第 1 象限または第 3 象限の角である.

第 4 問【三角関数の相互関係】

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次のように与えられたとき，他の 2 つの値を求めよ.

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$　$(0° < \theta < 90°)$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$　$(180° < \theta < 270°)$

(3)　$\tan\theta = -1$　$(270° < \theta < 360°)$　　(4)　$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$　$(0° < \theta < 360°)$

<解>

(1) $0° < \theta < 90°$ であるから　　$\cos\theta > 0$

よって，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{12}{13} \div \dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{5}$

(2) $180° < \theta < 270°$ であるから　　$\sin\theta < 0$

よって，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) \div \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+(-1)^2} = \dfrac{1}{2}$

$270° < \theta < 360°$ であるから　　$\cos\theta > 0$

よって　　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

また　　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\cos\theta < 0$ であるから　　$90° < \theta < 180°$ または $180° < \theta < 270°$

[1] $90° < \theta < 180°$ のとき　　$\sin\theta > 0$

よって，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{5} \div \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{3}{4}$

[2] $180° < \theta < 270°$ のとき　　$\sin\theta < 0$

よって　　$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\dfrac{3}{5}$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{3}{5}\right) \div \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{4}$

第 5 問【sin θ +cos θ と sin θ cos θ の関係】

θ が第 3 象限の角で $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta+\cos\theta$　　　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

＜解＞

(1)　θ が第 3 象限の角であるから　　$\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$

よって　　$\sin\theta+\cos\theta<0$　…… ①

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{2}=2$$

① から　　$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{2}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=-\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

第 6 問【90°　± θ，180°　± θ などの関係】

次の式を簡単にせよ．

(1)　$\cos(90^\circ-\theta)+\cos(-\theta)+\cos(90^\circ+\theta)+\cos(180^\circ+\theta)$

(2)　$\cos\theta+\cos(\theta+90^\circ)+\cos(\theta+180^\circ)+\cos(\theta+270^\circ)$

(3)　$\tan\theta+\tan(\theta+90^\circ)+\tan(90^\circ-\theta)+\tan(180^\circ-\theta)$

(4)　$\cos(90^\circ+\theta)\sin(540^\circ-\theta)-\sin(270^\circ+\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

＜解＞

(1)　(与式)$=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta=0$

(2)　$\cos(\theta+270^\circ)=\cos(\theta+90^\circ+180^\circ)=-\cos(\theta+90^\circ)=\sin\theta$

よって　　(与式)$=\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta=0$

(3)　(与式)$=\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=0$

(4)　$\sin(540^\circ-\theta)=\sin(360^\circ+180^\circ-\theta)=\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

また　　$\sin(270^\circ+\theta)=\sin(180^\circ+90^\circ+\theta)=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$

よって　　(与式)$=(-\sin\theta)\sin\theta-(-\cos\theta)(-\cos\theta)$

$=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=-1$

第 7 問【方程式・不等式（基本)】

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ のとき，次の不等式を解け．

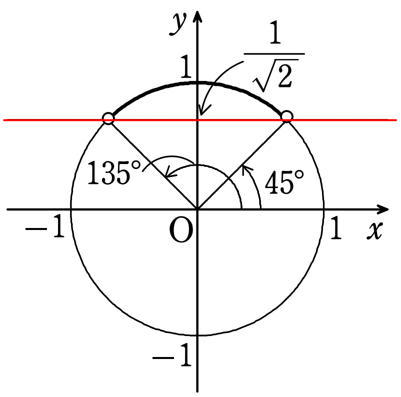
(1)　$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

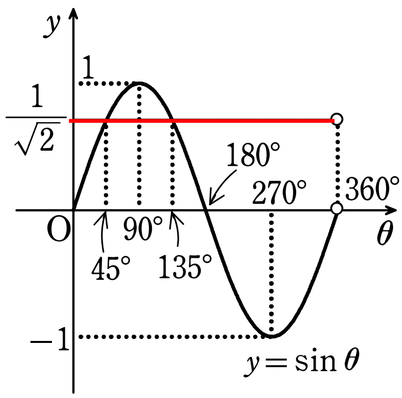
＜解＞

単位円またはグラフを利用する．

(1)　図から，解は　　$45^\circ<\theta<135^\circ$

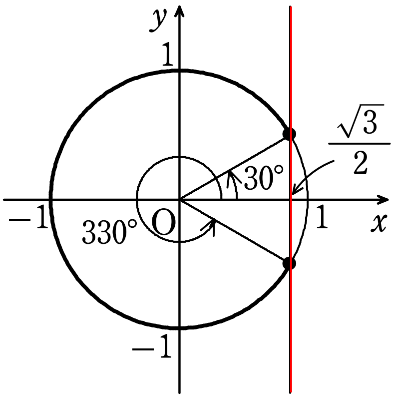
(1)

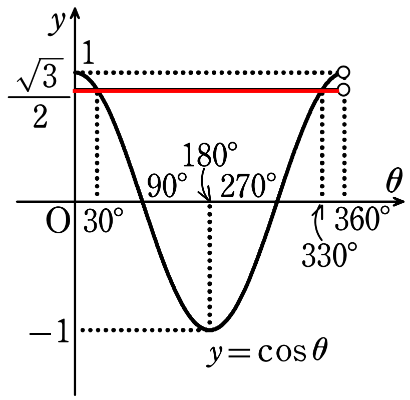




(2)　図から，解は　　　$30° \leqq \theta \leqq 330°$

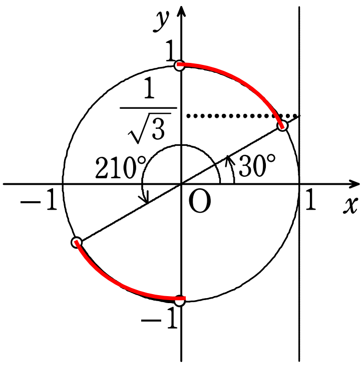
(2)

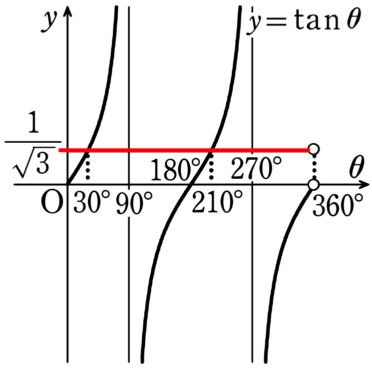




(3)　図から，解は　　　$30° < \theta < 90°$，$210° < \theta < 270°$

(3)





第 8 問【補角のある三角関数の不等式】

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の不等式を解け．

(1)　$\sin(\theta-60°) > \frac{1}{2}$　　　(2)　$\cos(2\theta+45°) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan(\theta-30°) \geqq 1$

＜解＞

(1) $0° \leqq \theta < 360°$ から　　$-60° \leqq \theta - 60° < 360° - 60°$

よって，不等式 $\sin(\theta - 60°) > \dfrac{1}{2}$ から　　$30° < \theta - 60° < 150°$

ゆえに　　$90° < \theta < 210°$

(2) $0° \leqq \theta < 360°$ から　　$45° \leqq 2\theta + 45° < 720° + 45°$

よって，不等式 $\cos(2\theta + 45°) < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から

$150° < 2\theta + 45° < 210°$，$510° < 2\theta + 45° < 570°$

ゆえに　　$52.5° < \theta < 82.5°$，$232.5° < \theta < 262.5°$

(3) $0° \leqq \theta < 360°$ から　　$-30° \leqq \theta - 30° < 360° - 30°$

よって，不等式 $\tan(\theta - 30°) \geqq 1$ から　　$45° \leqq \theta - 30° < 90°$，$225° \leqq \theta - 30° < 270°$

ゆえに　　$75° \leqq \theta < 120°$，$255° \leqq \theta < 300°$

第 9 問【連立方程式】

連立方程式 $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta - 1 = 0 \\ 2 - 3\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\beta = 0 \end{cases}$ を解け．

ただし，$0° \leqq \alpha < 90°$，$0° \leqq \beta < 90°$ とする．

＜解＞

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta - 1 = 0 & \cdots\cdots ① \\ 2 - 3\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\beta = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　　$\cos\beta = 1 - \sin\alpha$　$\cdots\cdots$ ③

これを ② に代入して　　$2 - 3\sin^2\alpha - 5\sin\alpha(1 - \sin\alpha) = 0$

整理すると　　$2\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 2 = 0$

よって　　$(\sin\alpha - 2)(2\sin\alpha - 1) = 0$　$\cdots\cdots$ ④

$\sin\alpha - 2 \neq 0$ であるから，④ より　　$2\sin\alpha - 1 = 0$

ゆえに　　$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$　　このとき，③ から　　$\cos\beta = \dfrac{1}{2}$

$0° \leqq \alpha < 90°$，$0° \leqq \beta < 90°$ であるから　　$\alpha = 30°$，$\beta = 60°$

第 10 問【三角関数のグラフ】

次の関数の周期を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(1)　$y=\cos(3\theta-90^\circ)$　　(2)　$y=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-60^\circ\right)$　　(3)　$y=2\sin(2\theta-60^\circ)+1$

＜解＞

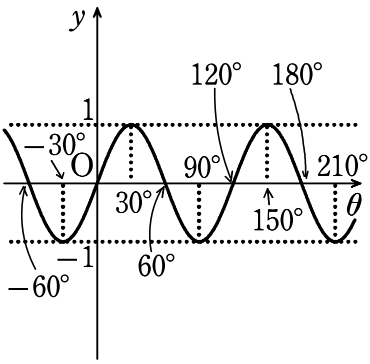
(1)　$\cos(3\theta-90^\circ)=\cos 3(\theta-30^\circ)$

したがって，$y=\cos(3\theta-90^\circ)$ のグラフは，

$y=\cos 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に 30° だけ平行移動したものである．

周期は　$360^\circ\div 3=120^\circ$　　グラフは[図]

(1)



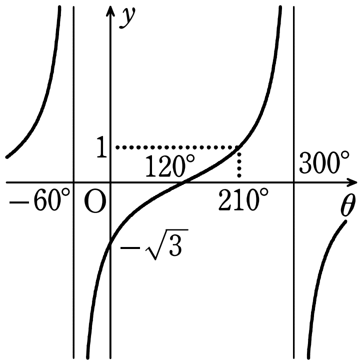
(2)　$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-60^\circ\right)=\tan\dfrac{1}{2}(\theta-120^\circ)$

したがって，$y=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-60^\circ\right)$ のグラフは，

$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に 120° だけ平行移動したものである．

周期は　$180^\circ\div\dfrac{1}{2}=360^\circ$　　グラフは[図]

(2)



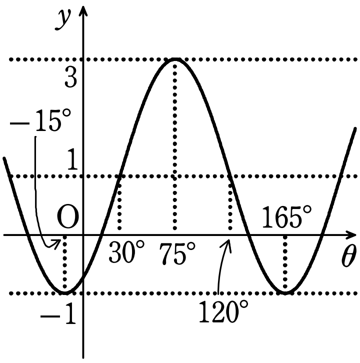
(3)　$2\sin(2\theta-60^\circ)+1=2\sin 2(\theta-30^\circ)+1$

したがって，$y=2\sin(2\theta-60^\circ)+1$ のグラフは，

$y=2\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に 30°，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．

周期は　$360^\circ\div 2=180^\circ$　　グラフは[図]

(3)



第 11 問【三角関数の最大値と最小値（基本)】

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta < 360°$ とする．

(1)　$y=\sin^2\theta-4\sin\theta+1$　　(2)　$y=\sin^2\theta+\cos\theta+1$

(3)　$y=2\tan^2\theta+4\tan\theta+5$　　(4)　$y=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

＜解＞

(1)　$x=\sin\theta$ とおくと　$-1 \leqq x \leqq 1$

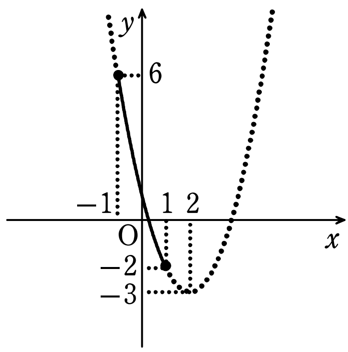
また　$y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

よって，y は

$x=-1$ すなわち $\theta=270°$ のとき最大値 6,

$x=1$ すなわち $\theta=90°$ のとき最小値 -2

をとる．



(2)　$y=(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+1$

$\quad=-\cos^2\theta+\cos\theta+2$

$x=\cos\theta$ とおくと　$-1 \leqq x \leqq 1$

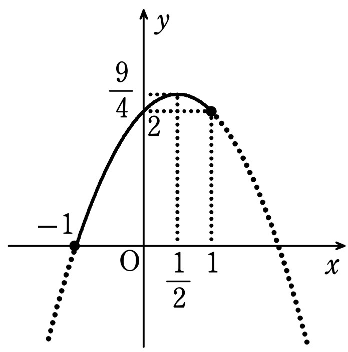
また　$y=-x^2+x+2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，y は

$x=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=60°$，$300°$のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$,

$x=-1$ すなわち $\theta=180°$ のとき最小値 0

をとる．



(3)　$x=\tan\theta$ とおくと，$0° \leqq \theta < 360°$ から，x はすべての実数値をとりうる．

また　$y=2x^2+4x+5=2(x+1)^2+3$

よって，y は $x=-1$ すなわち $\theta=135°$，$315°$ のとき最小値 3 をとる．

また，最大値はない．

(4)　$y=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=2\sin^2\theta-1$

$x=\sin\theta$ とおくと　$-1 \leqq x \leqq 1$

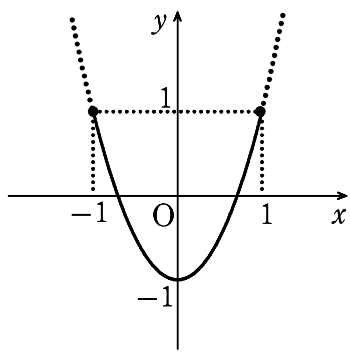
また　$y=2x^2-1$

よって，y は

$x=-1$，1 すなわち $\theta=90°$，$270°$のとき最大値 1,

$x=0$ すなわち $\theta=0°$，$180°$のとき最小値 -1

をとる．



第 12 問【方程式の解の存在する条件（基本）】

等式 $\sin^2\theta+\cos\theta-a=0$ を満たす θ の値が存在するように，定数 a の値の範囲を定めよ．

＜解＞

等式を変形すると　　$\sin^2\theta+\cos\theta=a$

$y=\sin^2\theta+\cos\theta$，$x=\cos\theta$ とおくと

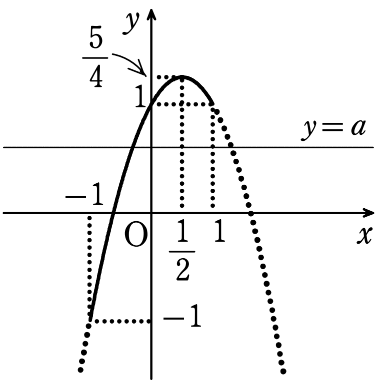
$$y=(1-\cos^2\theta)+\cos\theta=-x^2+x+1$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\quad\cdots\cdots ①$$

また　　$-1\leqq x\leqq 1$

よって，等式を満たす θ の値が存在するための条件は，x についての 2 次関数 ① のグラフが，$-1\leqq x\leqq 1$ において直線 $y=a$ と共有点をもつことである．

ゆえに，図から　　$-1\leqq a\leqq\dfrac{5}{4}$



第 13 問【加法定理の基本計算】

α は第 2 象限，β は第 1 象限の角とする．次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{5}$ のとき　　$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$

(2)　$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ のとき　　$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$

(3)　$\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=1$ のとき　　$\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$

＜解＞

(1)　α は第 2 象限の角であるから　　$\cos\alpha<0$

よって　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

β は第 1 象限の角であるから　　$\sin\beta>0$

よって　　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

ゆえに　　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{2(1-\sqrt{42})}{15}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$$

(2)　α は第 2 象限の角であるから　　$\sin\alpha>0$

よって　　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

β は第 1 象限の角であるから　　$\cos\beta>0$

よって　　$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

ゆえに　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$$

(3)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2+1}{1-(-2)\cdot1}=-\dfrac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2-1}{1+(-2)\cdot1}=3$

第 14 問【2 直線のなす角－tan 利用】

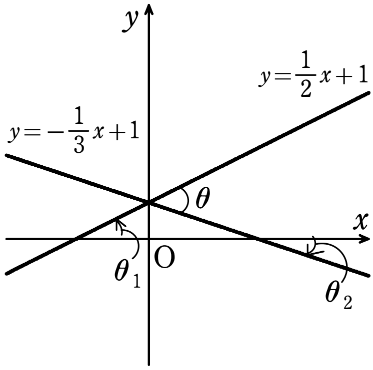
次の 2 直線のなす角 θ を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする．

(1)　$x-2y+2=0$，$x+3y-3=0$　　(2)　$y=x$，$y=-(2+\sqrt{3})x$

＜解＞

(1)　$x-2y+2=0$ から　$y=\dfrac{1}{2}x+1$

$x+3y-3=0$ から　$y=-\dfrac{1}{3}x+1$



図のように，2 直線が x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 $(0°<\theta_1<90°,\ -90°<\theta_2<0°)$ とすると　$\theta=\theta_1-\theta_2$

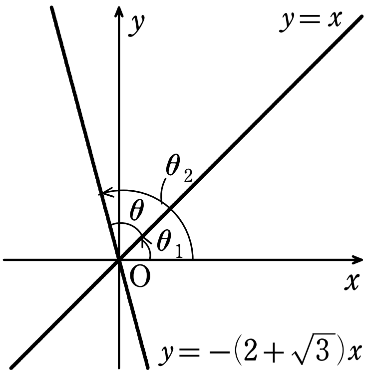
$\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$，$\tan\theta_2=-\dfrac{1}{3}$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=1$$

よって　$\theta=45°$

(2)　図のように，2 直線が x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 $(0°<\theta_1<90°,\ 90°<\theta_2<180°)$ とすると　$\theta=\theta_2-\theta_1$

$\tan\theta_1=1$，$\tan\theta_2=-2-\sqrt{3}$ であるから



$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\frac{(-2-\sqrt{3})-1}{1+(-2-\sqrt{3})\cdot 1}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}$$

よって　$\theta=60°$

第 15 問【倍角・半角の計算】

$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき　$\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$

(2) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{5}$ のとき　$\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$

(3) $\tan\alpha = 2$ のとき　$\tan 2\alpha$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$

＜解＞

(1) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{9}$

また　$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ から　$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

[1] $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{6}$$

$0^\circ \leqq \dfrac{\alpha}{2} \leqq 90^\circ$ であるから　$\cos\dfrac{\alpha}{2} \geqq 0$

よって　$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{6}}$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$$

$0^\circ \leqq \dfrac{\alpha}{2} \leqq 90^\circ$ から　$\sin\dfrac{\alpha}{2} \geqq 0$

よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{6}}$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$$

[2]　$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$$

$0°\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq 90°$ から　　$\cos\dfrac{\alpha}{2}\geqq 0$

よって　　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$$

$0°\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq 90°$ から　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}\geqq 0$

よって　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$

(2)　$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2-1=-\dfrac{17}{25}$

$0°\leqq\alpha\leqq 180°$ から　　$\sin\alpha\geqq 0$

よって　　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

ゆえに　　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{5}\cdot\left(-\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{4\sqrt{21}}{25}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-\dfrac{2}{5}}{2}=\frac{3}{10}$$

$0°\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq 90°$ であるから　　$\cos\dfrac{\alpha}{2}\geqq 0$　　よって　　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)}{2}=\frac{7}{10}$$

$0°\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq 90°$ から　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}\geqq 0$　　よって　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{7}{10}}=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$

また　　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$

$0^\circ\leqq\alpha\leqq 180^\circ$ であり，$\tan\alpha>0$ であるから　　$0^\circ<\alpha<90^\circ$ ……①

よって，$\cos\alpha>0$ となるから　　$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ゆえに　　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$$

① より，$0^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<45^\circ$ であるから　　$\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$

よって　　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

第 16 問【**$\tan\alpha=t$ とおくとき，$\sin 2\alpha$ などを t で表す**】

$\tan\alpha=t$ のとき $\cos^2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ を t で表せ．

＜解＞

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+t^2}$$

したがって

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\tan\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$=2\tan\alpha\cos^2\alpha=2t\cdot\frac{1}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2t}{1-t^2}$$

第 17 問【方程式（倍角など含む）】

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $\cos 2\theta = \cos\theta$　　(2) $\sin 2\theta = \cos\theta$　　(3) $2\cos 2\theta + 4\cos\theta - 1 = 0$

(4) $\sin\theta(1+\cos 2\theta) + \sin 2\theta(1+\cos\theta) = 0$

＜解＞

(1) $\cos 2\theta = \cos\theta$ から　$2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta$

よって　$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$　ゆえに　$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$

したがって　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2},\ 1$

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ より　$\theta = 120°,\ 240°$

$\cos\theta = 1$ より　$\theta = 0°$

したがって，解は　$\theta = 0°,\ 120°,\ 240°$

(2) $\sin 2\theta = \cos\theta$ から　$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

よって　$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

ゆえに　$\cos\theta = 0$ または $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，$\cos\theta = 0$ より　$\theta = 90°,\ 270°$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ より　$\theta = 30°,\ 150°$

したがって，解は　$\theta = 30°,\ 90°,\ 150°,\ 270°$

(3) $2\cos 2\theta + 4\cos\theta - 1 = 0$ から　$2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta - 1 = 0$

よって　$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

ゆえに　$(2\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$ …… ①

$2\cos\theta + 3 \fallingdotseq 0$ であるから，① より　$2\cos\theta - 1 = 0$

よって　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　$0° \leqq \theta < 360°$ であるから　$\theta = 60°,\ 300°$

(4) 与えられた方程式から　$\sin\theta\{1 + (2\cos^2\theta - 1)\} + 2\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta) = 0$

整理して　$\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

ゆえに　$\sin\theta = 0$ または $\cos\theta = 0,\ -\dfrac{1}{2}$

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，$\sin\theta = 0$ より　$\theta = 0°,\ 180°$

$\cos\theta = 0$ より　$\theta = 90°,\ 270°$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ より　$\theta = 120°,\ 240°$

したがって，解は　$\theta = 0°,\ 90°,\ 120°,\ 180°,\ 240°,\ 270°$

第 18 問【不等式（倍角など含む）】

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の不等式を解け．

(1)　$\cos 2\theta < \sin\theta$　　(2)　$\cos 2\theta \geqq \cos^2\theta$　　(3)　$\cos\theta + \sin 2\theta > 0$

＜解＞

(1)　$\cos 2\theta < \sin\theta$ から　$1 - 2\sin^2\theta < \sin\theta$

よって　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 > 0$

ゆえに　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) > 0$ …… ①

$\sin\theta + 1 \geqq 0$ であるから，① より　$\sin\theta + 1 \neq 0$ かつ $2\sin\theta - 1 > 0$

よって　$\sin\theta \neq -1$ かつ $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$

すなわち　$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，解は　$30° < \theta < 150°$

(2)　$\cos 2\theta \geqq \cos^2\theta$ から　$2\cos^2\theta - 1 \geqq \cos^2\theta$

よって　$\cos^2\theta - 1 \geqq 0$　　ゆえに　$(\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) \geqq 0$

よって　$\cos\theta \leqq -1$，$1 \leqq \cos\theta$ …… ①

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，① より　$\cos\theta = -1$ または $\cos\theta = 1$

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，$\cos\theta = -1$ より　$\theta = 180°$

$\cos\theta = 1$ より　$\theta = 0°$

したがって，解は　$\theta = 0°$，$180°$

(3)　$\cos\theta + \sin 2\theta > 0$ から　$\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta > 0$

よって　$\cos\theta(2\sin\theta + 1) > 0$

ゆえに　$(\cos\theta > 0$ かつ $2\sin\theta + 1 > 0)$ または $(\cos\theta < 0$ かつ $2\sin\theta + 1 < 0)$

すなわち　$\left(\cos\theta > 0 \text{ かつ } \sin\theta > -\dfrac{1}{2}\right)$ …… ①

または $\left(\cos\theta < 0 \text{ かつ } \sin\theta < -\dfrac{1}{2}\right)$ …… ②

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，① より

$(0° \leqq \theta < 90°,\ 270° < \theta < 360°)$　かつ　$(0° \leqq \theta < 210°,\ 330° < \theta < 360°)$

よって　$0° \leqq \theta < 90°$，$330° < \theta < 360°$

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，② より　$90° < \theta < 270°$　かつ　$210° < \theta < 330°$

よって　$210° < \theta < 270°$

したがって，解は　$0° \leqq \theta < 90°$，$210° < \theta < 270°$，$330° < \theta < 360°$

第 19 問【方程式（和⇔積利用）】

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の方程式を解け．
(1)　$\cos\theta + \cos 3\theta = 0$　　　(2)　$\sin 3\theta + \cos 2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

＜解＞

(1)　$\cos\theta + \cos 3\theta = 0$ から　$2\cos 2\theta \cos\theta = 0$

よって　$\cos 2\theta = 0$ または $\cos\theta = 0$

$0° \leqq \theta < 360°$ から　$0° \leqq 2\theta < 720°$

ゆえに，$\cos 2\theta = 0$ から　$2\theta = 90°,\ 270°,\ 450°,\ 630°$

よって　$\theta = 45°,\ 135°,\ 225°,\ 315°$

また，$\cos\theta = 0$ から　$\theta = 90°,\ 270°$

したがって，解は　$\theta = 45°,\ 90°,\ 135°,\ 225°,\ 270°,\ 315°$

(2)　与えられた方程式から　$(\sin 3\theta - \sin\theta) + \cos 2\theta - 1 = 0$

よって　$2\cos 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta - 1 = 0$

ゆえに　$2(1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta + (1 - 2\sin^2\theta) - 1 = 0$

整理すると　$\sin\theta(2\sin^2\theta + \sin\theta - 1) = 0$

すなわち　$\sin\theta(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$

したがって　$\sin\theta = 0,\ \dfrac{1}{2},\ -1$

$0° \leqq \theta < 360°$ であるから，$\sin\theta = 0$ より　$\theta = 0°,\ 180°$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ より　$\theta = 30°,\ 150°$

$\sin\theta = -1$ より　$\theta = 270°$

よって，解は　$\theta = 0°,\ 30°,\ 150°,\ 180°,\ 270°$

第 20 問【最大値と最小値（倍角など含む）】

関数 $y = 2\sin\theta - \cos 2\theta$ $(0° \leqq \theta < 360°)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

＜解＞

$y=2\sin\theta-(1-2\sin^2\theta)=2\sin^2\theta+2\sin\theta-1$

$x=\sin\theta$ とおくと　　$-1\leqq x\leqq 1$

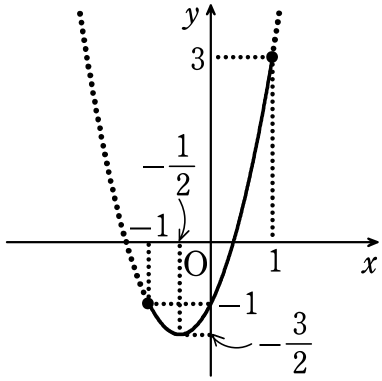
また　　$y=2x^2+2x-1=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

したがって，y は

$x=1$ すなわち $\theta=90°$ のとき最大値 3,

$x=-\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=210°$，$330°$ のとき最小値 $-\dfrac{3}{2}$

をとる．



第 21 問【方程式・不等式（三角関数の合成利用）】

$0°\leqq\theta<360°$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=-1$　　　(2)　$\sin\theta+\cos\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

＜解＞

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin(\theta+60°)$ であるから，方程式は

$$2\sin(\theta+60°)=-1 \qquad \text{よって} \qquad \sin(\theta+60°)=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$0°\leqq\theta<360°$ から　　$60°\leqq\theta+60°<360°+60°$

ゆえに，① から　　$\theta+60°=210°$，$330°$　　よって　　$\theta=150°$，$270°$

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ であるから，不等式は

$$\sqrt{2}\sin(\theta+45°)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{よって} \qquad \sin(\theta+45°)\geqq\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$0°\leqq\theta<360°$ から　　$45°\leqq\theta+45°<360°+45°$

ゆえに，① から　　$45°\leqq\theta+45°\leqq 150°$，$390°\leqq\theta+45°<405°$

よって　　$0°\leqq\theta\leqq 105°$，$345°\leqq\theta<360°$

第 22 問【最大値と最小値（倍角、合成利用）】

関数 $y=\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

＜解＞

$$y=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin 2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta+2=2\sin(2\theta+30^\circ)+2$$

$-1\leqq\sin(2\theta+30^\circ)\leqq 1$ であるから，y の最大値は　$2\cdot 1+2=4$,

最小値は　$2\cdot(-1)+2=0$

第 23 問【最大値と最小値（sin θ +cos θ と sin θ cos θ の関係利用）】

関数 $y=(\sin\theta+\cos\theta)+2\sin\theta\cos\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ．

＜解＞

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく．

この式の両辺を 2 乗すると　$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

ゆえに　$y=t+(t^2-1)+1=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

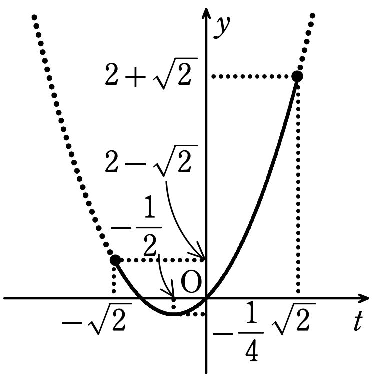
また，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ であるから

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ ……①

① の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2+\sqrt{2}$,

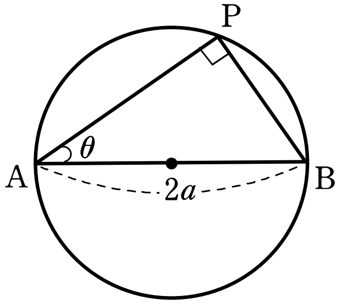
$t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる．



第 24 問【三角関数の合成応用－（図形問題）】

長さ $2a$ の線分 AB を直径とする円の周上に任意の点 P をとるとき，4AP＋3BP の最大値を求めよ．

＜解＞



[1]　点 P が 2 点 A，B と異なるとき

$\angle PAB=\theta$ ($0°<\theta<90°$) とおくと

$$AP=2a\cos\theta,\quad BP=2a\sin\theta$$

よって

$$\begin{aligned}4AP+3BP&=4\cdot 2a\cos\theta+3\cdot 2a\sin\theta\\&=8a\cos\theta+6a\sin\theta\\&=10a\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$（$\alpha$ は鋭角）

ここで，$0°<\theta<90°$ から　$\alpha<\theta+\alpha<90°+\alpha$（$\alpha$ は鋭角）

ゆえに，4AP＋3BP は $\theta+\alpha=90°$ のとき最大値 $10a$ をとる．

[2]　点 P が点 A と一致するとき　$AP=0$，$BP=2a$

よって　$4AP+3BP=6a$

[3]　点 P が点 B と一致するとき　$AP=2a$，$BP=0$

よって　$4AP+3BP=8a$

[1]～[3] から，4AP＋3BP の最大値は　$10a$

第 25 問【方程式の解をもつ条件（sin θ +cos θ と sin θ cos θ の関係利用）】

θ についての方程式 $\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+a=0$ が解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと

$$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

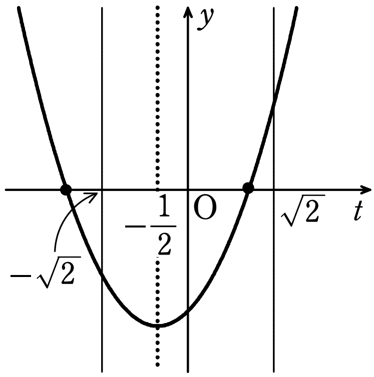
ゆえに，方程式を t で表すと　$t^2+t+a-1=0$　…… ①

また，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ であるから　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　…… ②

よって，t についての方程式 ① が ② の範囲に実数の解をもつような a の値の範囲を求めればよい．

$f(t)=t^2+t+a-1$ とすると，放物線 $y=f(t)$ は下に凸で，軸の方程式は　$t=-\dfrac{1}{2}$ (<0)

よって，① が ② の範囲に実数の解をもつための条件は　$D\geqq 0$　かつ　$f(\sqrt{2})\geqq 0$



$D\geqq 0$ から　$1^2-4(a-1)\geqq 0$

　これを解いて　$a\leqq\dfrac{5}{4}$　…… ③

$f(\sqrt{2})\geqq 0$ から　$2+\sqrt{2}+a-1\geqq 0$

　これを解いて　$a\geqq -1-\sqrt{2}$　…… ④

③，④ の共通範囲を求めて　$-1-\sqrt{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{4}$

第 26 問【方程式の解の個数】＜やや難＞

a は正の定数とする．$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ のとき，次の方程式の解の個数を調べよ．

$$\cos 2\theta-4a\cos\theta-2a+1=0$$

＜解＞

与えられた方程式から　$(2\cos^2\theta-1)-4a\cos\theta-2a+1=0$

よって　$\cos^2\theta-2a\cos\theta-a=0$ …… ①

$\cos\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta<360°$ から　$-1\leqq t\leqq 1$

t と θ の関係は次のようになる．

$t=1$ のとき　$\theta=0°$（ただ 1 つ），　$t=-1$ のとき　$\theta=180°$（ただ 1 つ），

$-1<t<1$ のとき，θ は 2 つの値をもつ．

① を t で表すと　$t^2-2at-a=0$ …… ②

t の 2 次方程式 ② について　$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(-a)=a(a+1)$

$f(t)=t^2-2at-a$ とおくと，$y=f(t)$ のグラフは下に凸で，軸の方程式は　$t=a$

また　$f(-1)=a+1$，$f(1)=-3a+1$

条件より，$a>0$ であるから

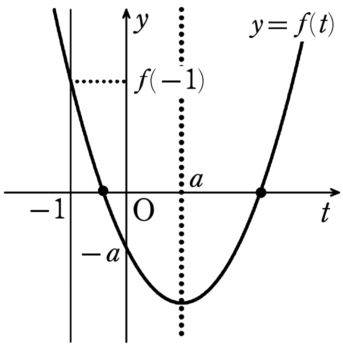
$D>0$ …… ③

軸について　$a>0$ …… ④

$f(-1)>0$ …… ⑤

が成り立つ．

したがって，② は -1 より大きい異なる 2 つの実数の解をもつ．



[1]　② が $t=1$ を解にもつ場合

$f(1)=0$ であるから　$-3a+1=0$　よって　$a=\dfrac{1}{3}$

このとき，② は　$t^2-\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0$　これを解くと　$t=1,\ -\dfrac{1}{3}$

ゆえに，① の解は　3 個

[2]　② が $-1<t<1$ の範囲に解を 2 つもつ場合

③，④，⑤ と次のことが同時に成り立つ．

$$\begin{cases}\text{軸について}\quad a<1 \quad \cdots\cdots ⑥\\ f(1)>0\end{cases}$$

④，⑥ から　$0<a<1$

$f(1)>0$ から　$-3a+1>0$　よって　$a<\dfrac{1}{3}$

$0<a<1$ と合わせて　$0<a<\dfrac{1}{3}$

[3]　② が $-1<t<1$ の範囲と $t>1$ の範囲に，それぞれ解を 1 つずつもつ場合

⑤ と $f(1)<0$ が成り立つ．

$f(1)<0$ から　　$-3a+1<0$　　ゆえに　　$a>\dfrac{1}{3}$

[4]　② が $t>1$ の範囲に解を 2 つもつ場合

③ と次のことが同時に成り立つ．

$$\begin{cases} \text{軸について} \quad a>1 \\ f(1)>0 \end{cases}$$

$f(1)>0$ から　　$a<\dfrac{1}{3}$　　これと $a>1$ の共通範囲はない．

[2] のとき，① の解は　4 個　　[3] のとき，① の解は　2 個

以上から，① の解の個数は

$$0<a<\frac{1}{3} \text{ のとき 4 個，} a=\frac{1}{3} \text{ のとき 3 個，} a>\frac{1}{3} \text{ のとき 2 個}$$

第 27 問【不等式（和⇔積利用の有名問題）】

$0° \leqq \theta < 90°$ のとき，不等式 $\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta<0$ を解け．

＜解＞

$\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta<0$ から　　$\cos\theta+2\cos4\theta\cos\theta<0$

よって　　$\cos\theta(2\cos4\theta+1)<0$ …… ①

$0° \leqq \theta < 90°$ であるから　　$\cos\theta>0$

ゆえに，① から　　$2\cos4\theta+1<0$　　したがって　　$\cos4\theta<-\dfrac{1}{2}$ …… ②

$0° \leqq \theta < 90°$ から　　$0° \leqq 4\theta < 360°$

よって，② から　　$120°<4\theta<240°$　　すなわち　$30°<\theta<60°$

第 28 問【三角形の形状（加法定理・和⇔積など利用）】

次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か.

(1)　$\sin A=2\cos B\sin C$　　(2)　$\cos A+\cos B=\sin C$

＜解＞

(1)　$A+B+C=180°$ であるから　$A=180°-(B+C)$

よって　$\sin A=\sin\{180°-(B+C)\}=\sin(B+C)$

$=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

これを $\sin A=2\cos B\sin C$ に代入すると

$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\cos B\sin C$

よって　$\sin B\cos C-\cos B\sin C=0$　すなわち　$\sin(B-C)=0$

$-180°<B-C<180°$ であるから　$B-C=0°$　ゆえに　$B=C$

したがって，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である.

(2)　$A+B+C=180°$ であるから　$A+B=180°-C$

よって　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=2\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

また　$\sin C=\sin\left(2\cdot\frac{C}{2}\right)=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

ゆえに，等式 $\cos A+\cos B=\sin C$ から　$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin\frac{C}{2}>0$ であるから　$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

よって　$\frac{A-B}{2}=\frac{C}{2}$ または $\frac{A-B}{2}=-\frac{C}{2}$

すなわち　$A=B+C$ または $B=A+C$

$A+B+C=180°$ から，$A=B+C$ のとき　$2A=180°$　よって　$A=90°$

$B=A+C$ のとき　$2B=180°$　よって　$B=90°$

したがって，△ABC は $A=90°$ または $B=90°$ の直角三角形である.