指数関数・対数関数

重要例題集　指数関数・対数関数

第１問【指数関数の計算１】

次の計算をせよ．

(1)　$36^{\frac{1}{2}}$　　(2)　$8^{\frac{4}{3}}$　　(3)　$81^{-\frac{5}{4}}$　　(4)　$\left(\dfrac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

(5)　$2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$　　(6)　$\left(9^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$　　(7)　$2\sqrt{3} \times \sqrt[3]{24} \div \sqrt{6} \div \sqrt[6]{72}$

＜解＞

(1)　$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$

別解　$36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6$

(2)　$8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$

別解　$8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

(3)　$81^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{81^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{81})^5} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{3^4})^5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{243}$

別解　$81^{-\frac{5}{4}} = (3^4)^{-\frac{5}{4}} = 3^{-5} = \dfrac{1}{243}$

$$= 2^{1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^1 3^0 = 2$$

(4) $\left(\dfrac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{125^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{(5^3)^{\frac{1}{3}}}{(4^3)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{5}{4}$

(5) $2^{-\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{6}}\div 2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=2^0=1$

(6) $\left(9^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{(3^2)^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=(3^0)^{\frac{1}{2}}=1$

(7) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{24}\div\sqrt{6}\div\sqrt[6]{72}=\underline{2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2^3\cdot 3}\div\sqrt{2\cdot 3}\div\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}}$

$=\underline{2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\times 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\div 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}}$

$=2^{1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=2^1 3^0=2$

第２問【指数関数の計算２】

次の計算をせよ．

(1) $(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5})$

(2) $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})\{(\sqrt[3]{5})^2-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\}$

(3) $\sqrt[3]{54}\times 2\sqrt[3]{-2}\times\sqrt[3]{16}$

(4) $\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}$

＜解＞

(1) （与式）$=(\sqrt[4]{6})^2-(\sqrt[4]{5})^2=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

(2) （与式）$=(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3=5+3=8$

(3) （与式）$=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}\times 2(-\sqrt[3]{2})\times\sqrt[3]{2^3\cdot 2}$

$=3\sqrt[3]{2}\times(-2\sqrt[3]{2})\times 2\sqrt[3]{2}=-12(\sqrt[3]{2})^3=-12\cdot 2=-24$

参考　n が奇数のとき　$\underline{\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}}$

(4) （与式）$=-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$

$=-\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-\sqrt[3]{3}=-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=0$

第 3 問【a^x+a^{-x} の計算応用】

$a>0$ とする.

(1) $(a^{3x}+a^{-3x})\div(a^x+a^{-x})$ を簡単にせよ.

(2) $a^x+a^{-x}=t$ のとき, $a^{2x}+a^{-2x}$, $a^{3x}+a^{-3x}$ を t で表せ.

＜解＞

(1) $(\text{与式})=\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}-1$

(2) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2a^xa^{-x}=t^2-2$

$a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3a^xa^{-x}(a^x+a^{-x})=t^3-3t$

第 4 問【a^x 含む方程式・不等式 1】

次の方程式, 不等式を解け.

(1) $2^x=64$ (2) $3^x=\dfrac{1}{81}$ (3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\dfrac{1}{64}$ (4) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16$

(5) $2^x>64$ (6) $3^x\leqq\dfrac{1}{27}$ (7) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\dfrac{1}{64}$ (8) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\geqq 27$

＜解＞

(1) $2^x=64$ から $2^x=2^6$ よって $x=6$

(2) $3^x=\dfrac{1}{81}$ から $3^x=3^{-4}$ よって $x=-4$

(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\dfrac{1}{64}$ から $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$ よって $x=3$

(4) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16$ から $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$

よって $3x=-4$ ゆえに $x=-\dfrac{4}{3}$

別解 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16$ から $2^{-3x}=2^4$

よって $-3x=4$ ゆえに $x=-\dfrac{4}{3}$

(5)　$2^x>64$ から　　$2^x>2^6$　　底 2 は 1 より大きいから　　$x>6$

(6)　$3^x\leqq\frac{1}{27}$ から　　$3^x\leqq3^{-3}$　　底 3 は 1 より大きいから　　$x\leqq-3$

(7)　$\left(\frac{1}{4}\right)^x<\frac{1}{64}$ から　　$\left(\frac{1}{4}\right)^x<\left(\frac{1}{4}\right)^3$　　底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいから　　$x>3$

(8)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x\geqq27$ から　　$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\geqq\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　　$2x\leqq-3$　　よって　　$x\leqq-\frac{3}{2}$

別解　$\left(\frac{1}{9}\right)^x\geqq27$ から　　$3^{-2x}\geqq3^3$

底 3 は 1 より大きいから　　$-2x\geqq3$　　よって　　$x\leqq-\frac{3}{2}$

第 5 問【a^x 含む方程式・不等式 2】

次の方程式，不等式を解け．

(1)　$(3^x)^2+3^x=12$　　　　(2)　$10^{2x}+10^x=2$

(3)　$4^x+2^{x+1}-24=0$　　　　(4)　$2^{2x}-2^{x+1}<0$

＜解＞

(1)　$(3^x)^2+3^x=12$ から　　$(3^x)^2+3^x-12=0$

$3^x=X$ とおくと　　$X^2+X-12=0$　　よって　　$(X+4)(X-3)=0$

$X>0$ であるから　　$X=3$　　すなわち　　$3^x=3$

したがって　　$x=1$

(2)　$10^{2x}+10^x=2$ から　　$(10^x)^2+10^x-2=0$

$10^x=X$ とおくと　　$X^2+X-2=0$　　よって　　$(X+2)(X-1)=0$

$X>0$ であるから　　$X=1$　　すなわち　　$10^x=10^0$

したがって　　$x=0$

(3)　$4^x+2^{x+1}-24=0$ から　　$(2^x)^2+2\cdot 2^x-24=0$

$2^x=X$ とおくと　　$X^2+2X-24=0$　　よって　　$(X+6)(X-4)=0$

$X>0$ であるから　　$X=4$　　すなわち　　$2^x=2^2$

したがって　　$x=2$

(4)　$2^{2x}-2^{x+1}<0$ から　　$(2^x)^2-2\cdot 2^x<0$

$2^x=X$ とおくと　　$X^2-2X<0$　　よって　　$X(X-2)<0$

$X>0$ であるから　　$X-2<0$

ゆえに　　$X<2$　　すなわち　　$2^x<2$

底 2 は 1 より大きいから　　$x<1$

第 6 問【指数関数の最大値・最小値】

次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1)　$y=2^{2x}-4\cdot 2^x+1$　　　　(2)　$y=-2^{2x}+2^x+2$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

＜解＞

(1)　$y=(2^x)^2-4\cdot 2^x+1$　　$2^x=t$ とおくと　　$t>0$ ……①

また　　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

① の範囲で y は $t=2$ すなわち $x=1$ のとき最小値 -3 をとる．また，最大値はない．

(2)　$y=-(2^x)^2+2^x+2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

$2^x=t$ とおく．$-1\leqq x\leqq 2$ から　　$2^{-1}\leqq 2^x\leqq 2^2$

よって　　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 4$ ……①

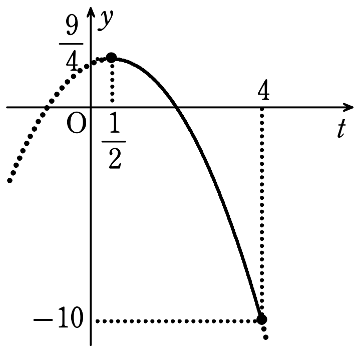
また　　$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

① の範囲で y は

$t=\frac{1}{2}$ すなわち $x=-1$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$，

$t=4$ すなわち $x=2$ のとき最小値 -10

をとる．



第 7 問【対数の定義 1】

次の等式を，$r=\log_a P$ の形に書け．ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする．

(1)　$3^4=81$　　(2)　$8^{\frac{2}{3}}=4$　　(3)　$5^{-1}=0.2$　　(4)　$7^0=1$　　(5)　$a^b=c$

＜解＞

(1)　$4=\log_3 81$　　(2)　$\dfrac{2}{3}=\log_8 4$　　(3)　$-1=\log_5 0.2$

(4)　$0=\log_7 1$　　(5)　$b=\log_a c$

第 8 問【対数の定義 2】

次の等式を満たすような，P または a の値を，それぞれ求めよ．

(1)　$\log_7 P=2$　　(2)　$\log_5 P=-2$　　(3)　$\log_a 27=3$　　(4)　$\log_a 4=-2$

＜解＞

(1)　$\log_7 P=2$ から　　$P=7^2$　　すなわち　　$P=49$

(2)　$\log_5 P=-2$ から　　$P=5^{-2}$　　すなわち　　$P=\dfrac{1}{25}$

(3)　$\log_a 27=3$ から　　$a^3=27$

底の条件より $a>0$，$a\neq 1$ であるから　　$a=3$

(4)　$\log_a 4=-2$ から　　$a^{-2}=4$　　よって　　$a^2=\dfrac{1}{4}$

底の条件より $a>0$，$a\neq 1$ であるから　　$a=\dfrac{1}{2}$

第 9 問【対数計算（基本)】

次の計算をせよ.

(1) $\log_2 30+2\log_2 3-\log_2 135$ (2) $\log_3 4-\log_3 20+2\log_3\sqrt{125}$

(3) $\log_{0.5}\dfrac{8}{13}-2\log_{0.5}\dfrac{3}{2}+\log_{0.5}\dfrac{26}{9}$ (4) $4\log_2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\log_2 3\cdot\log_3 4$ (6) $4\log_2 12-\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{4}{27}+2\log_4\sqrt{3}$

＜解＞

(1) (与式)$=\log_2\dfrac{30\times 3^2}{135}=\log_2 2=1$

別解 (与式)$=\log_2(2\times 3\times 5)+2\log_2 3-\log_2(3^3\times 5)$

$=(\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5)+2\log_2 3-(3\log_2 3+\log_2 5)$

$=\log_2 2=1$

(2) (与式)$=\log_3\dfrac{4\times(\sqrt{125})^2}{20}=\log_3 25=\log_3 5^2=2\log_3 5$

別解 (与式)$=\log_3 2^2-\log_3(2^2\times 5)+2\cdot\dfrac{1}{2}\log_3 5^3$

$=2\log_3 2-(2\log_3 2+\log_3 5)+3\log_3 5=2\log_3 5$

(3) (与式)$=\log_{0.5}\dfrac{\dfrac{8}{13}\times\dfrac{26}{9}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\log_{0.5}\dfrac{2^6}{3^4}=6\log_{0.5}2-4\log_{0.5}3$

$=6\log_{0.5}0.5^{-1}-4\log_{0.5}3=-6-4\log_{0.5}3$

別解 (与式)$=\log_{0.5}\dfrac{2^3}{13}-2\log_{0.5}\dfrac{3}{2}+\log_{0.5}\dfrac{2\times 13}{3^2}$

$=(3\log_{0.5}2-\log_{0.5}13)-2(\log_{0.5}3-\log_{0.5}2)+(\log_{0.5}2+\log_{0.5}13-2\log_{0.5}3)$

$=6\log_{0.5}2-4\log_{0.5}3$

$=6\log_{0.5}0.5^{-1}-4\log_{0.5}3=-6-4\log_{0.5}3$

(4) (与式)$=\log_2\dfrac{(\sqrt{2})^4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3^{\frac{1}{2}}}=\log_2 2=1$

別解 (与式)$=4\cdot\dfrac{1}{2}\log_2 2-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\left(\dfrac{1}{2}\log_2 3-\log_2 2\right)=\log_2 2=1$

(5) (与式)$=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_2 4=2$

(6) (与式)$=\log_2 12^4-\log_2\sqrt{\dfrac{4}{27}}+2\dfrac{\log_2\sqrt{3}}{\log_2 4}$

$=\log_2(2^2\times 3)^4-\log_2\dfrac{2}{3\sqrt{3}}+\log_2\sqrt{3}$

$=\log_2\dfrac{(2^8\times 3^4)\times\sqrt{3}}{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}=\log_2(2^7\times 3^6)$

$=7\log_2 2+6\log_2 3=7+6\log_2 3$

別解 (与式)$=4\log_2(2^2\times 3)-\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^2}{3^3}+2\dfrac{\log_2\sqrt{3}}{\log_2 4}$

$=4(2\log_2 2+\log_2 3)-\dfrac{1}{2}(2\log_2 2-3\log_2 3)+\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$=7\log_2 2+6\log_2 3=7+6\log_2 3$

第 10 問【対数計算の応用 1】

次の計算をせよ.

(1) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 4)$ (2) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 8$

(3) $\log_2 10\cdot\log_5 10-(\log_2 5+\log_5 2)$

＜解＞

(1) (与式)$=\left(\log_2 9+\underline{\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}}\right)\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+\underline{\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}}\right)$

$=\left(2\log_2 3+\underline{\dfrac{\log_2 3}{3}}\right)\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+\underline{\dfrac{2}{2\log_2 3}}\right)=\dfrac{7}{3}\log_2 3\cdot\dfrac{2}{\log_2 3}=\dfrac{14}{3}$

(2) (与式)$=\log_2 3\cdot\underline{\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 7}}=\log_2 8=3$

(3) (与式)$=\log_2(2\times 5)\cdot\log_5(2\times 5)-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=(\log_2 2+\log_2 5)(\log_5 2+\log_5 5)-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=(1+\log_2 5)(\log_5 2+1)-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=1+\log_2 5\cdot\log_5 2=1+\log_2 5\cdot\dfrac{1}{\log_2 5}=1+1=2$

第 11 問【対数計算の応用 2】

次の式を x^p の形で表せ．ただし，a，b は 1 でない正の数とする．

(1)　$10^{-\log_{10} x}$　　(2)　$a^{2\log_a x}$　　(3)　$a^{\log_b x}$

＜解＞

(1)　$A=10^{-\log_{10} x}$ とおく．

10 を底として両辺の対数をとると　$\log_{10} A=-\log_{10} x$

よって　$\log_{10} A=\log_{10} x^{-1}$　ゆえに　$A=x^{-1}$

(2)　$A=a^{2\log_a x}$ とおく．

a を底として両辺の対数をとると　$\log_a A=2\log_a x$

よって　$\log_a A=\log_a x^2$　ゆえに　$A=x^2$

(3)　$A=a^{\log_b x}$ とおく．

b を底として両辺の対数をとると　$\log_b A=\log_b x\cdot\log_b a$

よって　$\log_b A=\log_b a\cdot\log_b x$

ゆえに　$\log_b A=\log_b x^{\log_b a}$　したがって　$A=x^{\log_b a}$

第 12 問【対数の大小評価】

次の 3 つの数の大小を比較せよ．

(1)　$\log_2 0.5$，$\log_2 3$，$\log_2 5$　　(2)　$\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{10}$，$\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}$，$\log_{\frac{1}{5}} 2$

＜解＞

(1)　関数 $y=\log_2 x$ は，底 2 が 1 より大きいから，単調に増加する．

$0.5<3<5$ であるから　$\log_2 0.5<\log_2 3<\log_2 5$

(2)　関数 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ は，底 $\frac{1}{5}$ が 1 より小さいから，単調に減少する．

$\frac{1}{10}<\frac{1}{2}<2$ であるから　$\log_{\frac{1}{5}} 2<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{10}$

第 13 問【対数方程式・不等式】

次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\log_7 x = 3$　　(2)　$\log_3(x+1) = \dfrac{1}{3}$　　(3)　$\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

(4)　$\log_7 x < 3$　　(5)　$\log_3(x+1) > \dfrac{1}{3}$　　(6)　$\log_{\frac{1}{3}} x > 2$

(7)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \dfrac{1}{2}$　　(8)　$\log_x \sqrt{2} = \dfrac{1}{6}$　　(9)　$\log_x \dfrac{1}{4} = -1$

＜解＞

(1)　方程式から　$x = 7^3$　よって　$x = 343$

(2)　方程式から　$x+1 = 3^{\frac{1}{3}}$　よって　$x = \sqrt[3]{3} - 1$

(3)　方程式から　$x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$　よって　$x = \dfrac{1}{9}$

(4)　真数は正であるから　$x > 0$ …… ①

不等式から　$\log_7 x < \log_7 7^3$　すなわち　$\log_7 x < \log_7 343$

底 7 は 1 より大きいから　$x < 343$ …… ②

①，② から，解は　$0 < x < 343$

(5)　真数は正であるから　$x+1 > 0$　よって　$x > -1$ …… ①

不等式から　$\log_3(x+1) > \log_3 3^{\frac{1}{3}}$　すなわち　$\log_3(x+1) > \log_3 \sqrt[3]{3}$

底 3 は 1 より大きいから　$x+1 > \sqrt[3]{3}$

ゆえに　$x > \sqrt[3]{3} - 1$ …… ②　①，② から，解は　$x > \sqrt[3]{3} - 1$

(6)　真数は正であるから　$x > 0$ …… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$　すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{9}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x < \dfrac{1}{9}$ …… ②

①，② から，解は　$0 < x < \dfrac{1}{9}$

(7)　真数は正であるから　　$x-2>0$　　よって　　$x>2$ …… ①

不等式から　　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$　　すなわち　　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　　$x-2>\frac{\sqrt{3}}{3}$

ゆえに　　$x>\frac{\sqrt{3}}{3}+2$ …… ②　　①，② から，解は　　$x>\frac{\sqrt{3}}{3}+2$

(8)　底の条件から　　$x>0$，$x\neq 1$ …… ①

方程式から　　$x^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}$　　よって　　$x=(\sqrt{2})^6$

ゆえに　　$x=8$　　これは ① を満たす．

(9)　底の条件から　　$x>0$，$x\neq 1$ …… ①

方程式から　　$x^{-1}=\frac{1}{4}$

よって　　$x=4$　　これは ① を満たす．

第 14 問【対数方程式（応用）1】

次の方程式を解け．

(1)　$\log_{10}(x+2)(x+5)=1$　　(2)　$\log_4(2x+3)+\log_4(4x+1)=2\log_4 5$

(3)　$\log_{\sqrt{2}}(2-x)+\log_2(x+2)=3$

＜解＞

(1)　方程式から　　$(x+2)(x+5)=10$

ゆえに　　$x^2+7x=0$　　これを解いて　　$x=0,\ -7$

(2)　真数は正であるから　　$2x+3>0$，$4x+1>0$　　よって　　$x>-\frac{1}{4}$ …… ①

方程式から　　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 5^2$

すなわち　　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 25$

ゆえに　　$(2x+3)(4x+1)=25$　　よって　　$4x^2+7x-11=0$

したがって　　$(4x+11)(x-1)=0$　　ゆえに　　$x=-\frac{11}{4}$，1

① を満たすのは　　$x=1$

(3)　真数は正であるから　　$2-x>0$，$x+2>0$　　よって　　$-2<x<2$ ……①

方程式から　　$\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2\sqrt{2}}+\log_2(x+2)=\log_2 2^3$

ゆえに　　$2\log_2(2-x)+\log_2(x+2)=\log_2 8$

よって　　$\log_2(2-x)^2(x+2)=\log_2 8$

したがって　　$(2-x)^2(x+2)=8$　　整理すると　　$x(x^2-2x-4)=0$

これを解いて　　$x=0$，$1\pm\sqrt{5}$　　① を満たすのは　　$x=0$，$1-\sqrt{5}$

第 15 問【対数方程式（応用）2】

次の方程式を解け．

(1)　$(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+3=0$　　　　(2)　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{4}} x=0$

＜解＞

(1)　方程式から　　$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

よって　　$(\log_2 x-1)(\log_2 x-3)=0$

ゆえに　　$\log_2 x=1$，3　　したがって　　$x=2$，8

(2)　方程式から　　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=0$

よって　　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x=0$

ゆえに　　$\log_{\frac{1}{2}} x=0$，$\dfrac{1}{2}$　　したがって　　$x=1$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

第 16 問【対数関数の応用（2 次方程式との融合問題）】

x の 2 次方程式 $x^2-4x\log_2 a+4\log_2 a^2+32=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

＜解＞

真数は正であるから　$a>0$，$a^2>0$　よって　$a>0$ …… ①

与えられた方程式について

$$\frac{D}{4}=(-2\log_2 a)^2-(4\log_2 a^2+32)$$

$$=4\{(\log_2 a)^2-2\log_2 a-8\}=4(\log_2 a+2)(\log_2 a-4)$$

方程式が異なる 2 つの実数の解をもつための条件は

$D>0$　すなわち　$(\log_2 a+2)(\log_2 a-4)>0$

よって　$\log_2 a<-2$，$4<\log_2 a$

ゆえに　$\log_2 a<\log_2\frac{1}{4}$，$\log_2 16<\log_2 a$

底 2 は 1 より大きいから　$a<\frac{1}{4}$，$16<a$ …… ②

①，② から，求める a の値の範囲は　$0<a<\frac{1}{4}$，$16<a$

第 17 問【対数関数の応用（2 次関数との融合問題）】

$x\geqq 2$，$y\geqq 1$，$x^2y=64$ のとき，$(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最大値，最小値を求めよ．

＜解＞

$\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とおく．

2 を底として $x^2y = 64$ の両辺の対数をとると

$\log_2 x^2y = \log_2 64$　　よって　　$2\log_2 x + \log_2 y = 6$

ゆえに　$2X + Y = 6$　　したがって　　$Y = 6 - 2X$ …… ①

また，$x \geqq 2$, $y \geqq 1$ から　　$\log_2 x \geqq \log_2 2$, $\log_2 y \geqq \log_2 1$

すなわち　　$\log_2 x \geqq 1$, $\log_2 y \geqq 0$

よって　　$X \geqq 1$, $Y = 6 - 2X \geqq 0$　　ゆえに　　$1 \leqq X \leqq 3$ …… ②

また　　$(\log_2 x)(\log_2 y) = XY = X(6 - 2X)$

$$= -2X^2 + 6X = -2\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

② の範囲で，$(\log_2 x)(\log_2 y)$ は

$X = \dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$，$X = 3$ のとき最小値 0　をとる．

$X = \dfrac{3}{2}$ のとき，① から　　$Y = 3$　　よって　　$x = 2\sqrt{2}$，$y = 8$

$X = 3$ のとき，① から　　$Y = 0$　　よって　　$x = 8$, $y = 1$

以上から　　$x = 2\sqrt{2}$，$y = 8$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$；$x = 8$, $y = 1$ のとき最小値 0

第 18 問【対数関数の応用（不等式と領域)】

次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ．

$$\log_2 x \leqq 2 + \log_2 y \leqq \log_2 x + \log_2 (4 - 2x)$$

＜解＞

真数は正であるから　$x>0,\ y>0,\ 4-2x>0$

よって　$0<x<2,\ y>0$ …… ①

条件式から　$\log_2 x \leqq \log_2 4+\log_2 y \leqq \log_2 x(4-2x)$

ゆえに　$\log_2 x \leqq \log_2 4y \leqq \log_2 x(4-2x)$

底 2 は 1 より大きいから　$x \leqq 4y \leqq x(4-2x)$

すなわち　$\dfrac{x}{4} \leqq y \leqq \dfrac{x}{2}(2-x)$ …… ②

直線 $y=\dfrac{x}{4}$ と放物線 $y=\dfrac{x}{2}(2-x)$ の交点の x 座標は，

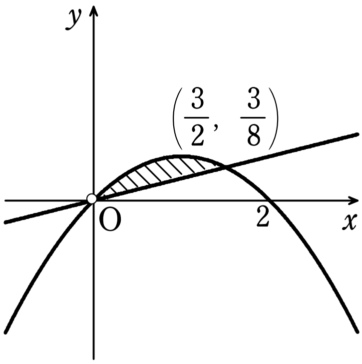
$\dfrac{x}{4}=\dfrac{x}{2}(2-x)$ より　$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

$x=0$ のとき $y=0$,　$x=\dfrac{3}{2}$ のとき $y=\dfrac{3}{8}$

よって，①，② から，点 $(x,\ y)$ の存在する範囲は

[図] の斜線部分ようになる．

ただし，境界線上の点は原点を除いて他は含む．



第 19 問【常用対数と桁数】

> $\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$ とする．
> (1)　2^{35} は何桁の整数か．
> (2)　$(0.06)^{35}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

＜解＞

(1)　$\log_{10}2^{35}=35\log_{10}2=35\times0.3010=10.5350$

よって　$10 \leqq \log_{10}2^{35}<11$　ゆえに　$10^{10} \leqq 2^{35}<10^{11}$

したがって，2^{35} は 11 桁の整数である．

(2)　$\log_{10}(0.06)^{35}=35\log_{10}\dfrac{6}{100}=35\log_{10}\dfrac{2\times3}{10^2}=35(\log_{10}2+\log_{10}3-2\log_{10}10)$

$=35(0.3010+0.4771-2)=-42.7665$

よって　$-43 \leqq \log_{10}(0.06)^{35}<-42$　ゆえに　$\dfrac{1}{10^{43}} \leqq (0.06)^{35}<\dfrac{1}{10^{42}}$

したがって，$(0.06)^{35}$ は小数第 43 位に初めて 0 でない数字が現れる．

第 20 問【常用対数の応用】

あるガラス板を 1 枚通るごとに，光線はその強さの 1 割を失う．このとき，このガラス板を何枚以上重ねると，これを通ってきた光線の強さが，もとの強さの 3 分の 1 以下になるか．ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

＜解＞

光線のもとの強さを L とする．ガラス板を n 枚以上重ねるとき，光線の強さがもとの強さの 3 分の 1 以下になるとすると

$$(1-0.1)^nL\leqq\frac{1}{3}L \qquad \text{よって} \qquad 0.9^n\leqq\frac{1}{3}$$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}0.9\leqq\log_{10}\dfrac{1}{3}$ ……①

ここで　$\log_{10}0.9=\log_{10}\dfrac{9}{10}=\log_{10}\dfrac{3^2}{10}=2\log_{10}3-\log_{10}10$

$=2\times0.4771-1=-0.0458$

$\log_{10}\dfrac{1}{3}=-\log_{10}3=-0.4771$

よって，① から　$-0.0458n\leqq-0.4771$

ゆえに　$n\geqq\dfrac{0.4771}{0.0458}=10.4\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=11$

したがって，ガラス板を 11 枚以上重ねればよい．