微分・積分(数Ⅱ)

重要例題集　微分・積分（数Ⅱ）

第 1 問【極限の基本計算】

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}3x^2$　　(2) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{t-1}{t+1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x-2}$

＜解＞

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}3x^2=3\cdot1^2=3$　　(2) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{t-1}{t+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x-2}=\frac{(-1)^2+1}{-1-2}=-\frac{2}{3}$

第 2 問【微分係数の定義】

(1) $f(x)=x^2-2x$ のとき，定義に従って $f'(a)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y=-2x^2$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の傾きを求めよ.

＜解＞

(1) $$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2-2(a+h)\}-(a^2-2a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(2a-2)h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\{(2a-2)+h\}=2a-2$$

(2) $f(x)=-2x^2$ とおく.

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の傾きを m とすると　　$m=f'(1)$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2(1+h)^2-(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-4h-2h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-4-2h)=-4$$

したがって　　$m=-4$

第 3 問【微分係数の応用計算】

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数が 3 のとき，次の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$

＜解＞

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\underline{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2\right\}}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$

$h\longrightarrow 0$ のとき $2h\longrightarrow 0$ であるから　(与式)$=2f'(a)=6$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=\underline{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)\right\}}$$
$$=-3\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}$$

$h\longrightarrow 0$ のとき $-3h\longrightarrow 0$ であるから　(与式)$=-3f'(a)=-9$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\underline{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3-\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)\right\}}$$
$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$$

$h\longrightarrow 0$ のとき $3h\longrightarrow 0$, $-2h\longrightarrow 0$ であるから

(与式)$=3f'(a)+2f'(a)=5f'(a)=15$

第 4 問【整式の微分計算】

次の関数を微分せよ．

(1) $y=-2$　　(2) $y=-4x-1$　　(3) $y=-3x^2+6x-5$

(4) $y=-\dfrac{x^2}{2}+3$　　(5) $y=x^3-5x^2-6$　　(6) $y=-2x^3+6x^2+4x$

(7) $y=3x(2x-1)$　　(8) $y=(2x+1)^2$　　(9) $y=(3x-1)(x^2+1)$

＜解＞

(1)　$y'=0$

(2)　$y'=-4\cdot 1=-4$

(3)　$y'=-3\cdot 2x+6=-6x+6$

(4)　$y'=-\frac{1}{2}\cdot 2x=-x$

(5)　$y'=3x^2-5\cdot 2x=3x^2-10x$

(6)　$y'=-2\cdot 3x^2+6\cdot 2x+4=-6x^2+12x+4$

(7)　$y=6x^2-3x$ であるから　　$y'=6\cdot 2x-3=12x-3$

(8)　$y=4x^2+4x+1$ であるから　　$y'=4\cdot 2x+4=8x+4$

(9)　$y=3x^3-x^2+3x-1$ であるから　　$y'=3\cdot 3x^2-2x+3=9x^2-2x+3$

第 5 問【接線の方程式】

次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ.

$y=x^2-3x+2$　(1，0)

＜解＞

与えられた曲線について，$y=f(x)$ とおく.

$f'(x)=2x-3$

よって，点 (1，0) における接線の傾きは　　$f'(1)=2\cdot 1-3=-1$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y-0=-1\cdot(x-1)$　　すなわち　　$y=-x+1$

第 6 問【傾きがわかる接線】

曲線 $y=x^3+3x^2-6$ について，傾きが 9 である接線の方程式を求めよ.

＜解＞

$f(x)=x^3+3x^2-6$ とおくと　　$f'(x)=3x^2+6x$

接点の座標を $(a,\ a^3+3a^2-6)$ とすると，接線の傾きが 9 であるから

$f'(a)=9$　　よって　　$3a^2+6a=9$

ゆえに　　$a^2+2a-3=0$　　これを解いて　　$a=-3,\ 1$

よって，接点の座標は　　$(-3,\ -6)$，$(1,\ -2)$

したがって，求める接線の方程式は　　$y+6=9(x+3)$，$y+2=9(x-1)$

すなわち　　$y=9x+21$，$y=9x-11$

第 7 問【通る点が与えられている接線】

曲線 $y=x^2+1$ の接線で，点 A $(1,\ -2)$ を通るものの方程式を求めよ．

＜解＞

$y'=2x$　である．

接点の座標を $(a,\ a^2+1)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^2+1)=2a(x-a)$　　すなわち　$y=2ax-a^2+1$　…… ①

これが点 A $(1,\ -2)$ を通るから　　$-2=2a-a^2+1$

すなわち　　$a^2-2a-3=0$　　これを解いて　　$a=-1,\ 3$

① から，接線の方程式は，$a=-1$ のとき　　$y=-2x$

$a=3$　のとき　　$y=6x-8$

第 8 問【直交する 2 接線】

2 曲線 $y=x^2+2$，$y=x^2+ax+3$ の交点を P とする．P におけるそれぞれの曲線の接線が直交するように，定数 a の値を定めよ．

＜解＞

$f(x)=x^2+2$，$g(x)=x^2+ax+3$ とおくと　　$f'(x)=2x$，$g'(x)=2x+a$

P の x 座標を p とすると，条件から　　$f(p)=g(p)$，$f'(p)g'(p)=-1$

$f(p)=g(p)$ から　　$p^2+2=p^2+ap+3$　　すなわち　　$ap=-1$ …… ①

$f'(p)g'(p)=-1$ から　　$2p(2p+a)=-1$　　すなわち　　$4p^2+2ap=-1$ …… ②

① を ② に代入して　　$4p^2+2\cdot(-1)=-1$

よって　　$p^2=\dfrac{1}{4}$　　　ゆえに　$p=\pm\dfrac{1}{2}$

① から　　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき $a=-2$，　$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき $a=2$

したがって　　$a=\pm 2$

第 9 問【3 次関数の増減とグラフ】

次の関数の極値を求め，グラフをかけ．

(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$　　　　(2)　$y=-x^3+6x^2-12x$

＜解＞

(1)　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1$，3

y の増減表は，次のようになる．

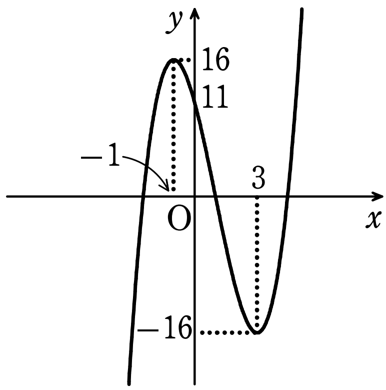
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$

よって，$x=-1$ のとき極大値 16，

$x=3$ のとき極小値 -16 をとる．

また，グラフは〔図〕のようになる．

(1)



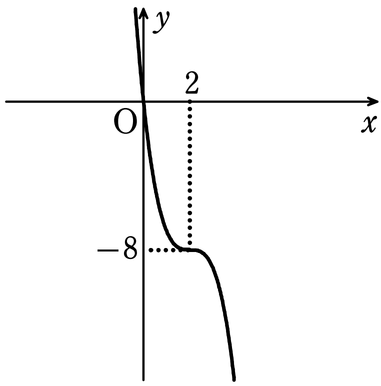
(2) $y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

すべての実数の範囲で $y'\leqq 0$ であるから，y は単調に減少する．

よって，極値はない．

また，グラフは〔図〕のようになる．

(2)



第 10 問【極値をもつ条件】

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大値 34 をとり，$x=5$ で極小値 d をとる．定数 a，b，c，d の値を求めよ．

＜解＞

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$，$x=5$ で極値をとるから　　$f'(-1)=0$，$f'(5)=0$

よって　　$3-2a+b=0$ …… ①，　$75+10a+b=0$ …… ②

また，$f(-1)=34$，$f(5)=d$ であるから

$-1+a-b+c=34$ …… ③，　$125+25a+5b+c=d$ …… ④

①，② から　　$a=-6$，$b=-15$

更に，③，④ から　　$c=26$，$d=-74$

このとき　$f(x)=x^3-6x^2-15x+26$

$f'(x)=3x^2-12x-15$

$=3(x+1)(x-5)$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 34	$\searrow$	極小 -74	$\nearrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=-1$ のとき極大値 34，$x=5$ のとき極小値 -74 をとり，条件を満たす．

よって　　$a=-6$，$b=-15$，$c=26$，$d=-74$

第 11 問【3 次関数の最大値と最小値】

次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$y=x^3-9x \qquad (-3\leqq x\leqq 3)$

＜解＞

$y'=3x^2-9=3(x^2-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{3}$

$-3\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

よって，$x=-\sqrt{3}$ のとき最大値 $6\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$ のとき最小値 $-6\sqrt{3}$ をとる

第 12 問【定義域が変わる 3 次関数の最大値】

$a>0$ とする．関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値，最小値を求めよ．

＜解＞

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

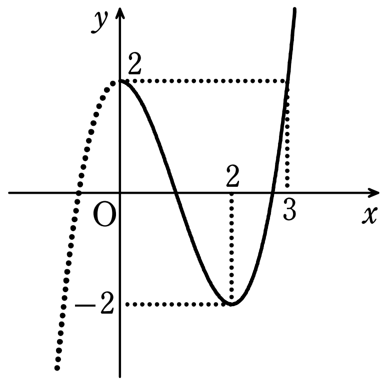
$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

また，$f(x)=2$ とすると　　$x^3-3x^2+2=2$

よって　　$x^2(x-3)=0$　　　ゆえに　　$x=0,\ 3$

$x \geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．



したがって，$0<a<2$ のとき

$x=0$ で最大値 2,

$x=a$ で最小値 a^3-3a^2+2

$2 \leqq a<3$ のとき

$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 -2

$a=3$ のとき

$x=0$，3 で最大値 2，$x=2$ で最小値 -2

$3<a$ のとき

$x=a$ で最大値 a^3-3a^2+2，$x=2$ で最小値 -2

第 13 問【最大値・最小値の図形への応用】

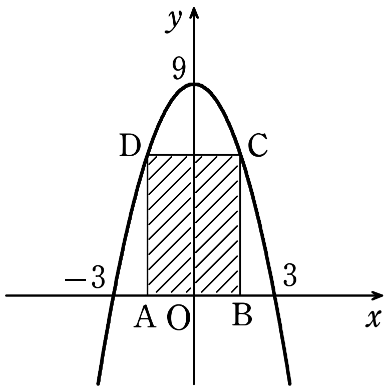
放物線 $y=-x^2+9$ と x 軸で囲まれた図形に内接する長方形 ABCD の面積の最大値を求めよ．ただし，A，B は x 軸上にあるものとする．

＜解＞

A $(-x,\ 0)$　$(0<x<3)$　とすると

B $(x,\ 0)$，C $(x,\ -x^2+9)$，D $(-x,\ -x^2+9)$

と表される．



長方形 ABCD の面積を S とすると

$$S=2x(-x^2+9)=-2x^3+18x$$

よって　　$S'=-6x^2+18$

$$=-6(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$S'=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{3}$

$0<x<3$ における S の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	

よって，S は $x=\sqrt{3}$ のとき最大値 $12\sqrt{3}$ をとる．

第 14 問【方程式の解の個数】

方程式 $x^3+x^2-x+a=0$ (a は定数) の異なる実数の解の個数を調べよ.

＜解＞

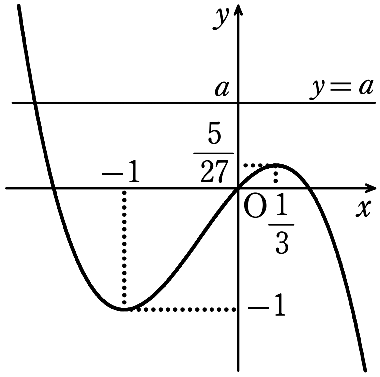
方程式を変形すると　$-x^3-x^2+x=a$

$f(x)=-x^3-x^2+x$ とおくと　$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ \dfrac{1}{3}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{27}$	$\searrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる.
このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の異なる実数の解の個数に一致する.
したがって，求める解の個数は

$a<-1,\ \dfrac{5}{27}<a$ のとき 1 個；　$a=-1,\ \dfrac{5}{27}$ のとき 2 個；

$-1<a<\dfrac{5}{27}$ のとき 3 個

第 15 問【方程式が正の 2 個の解、負の 1 個の解をもつ条件】

方程式 $x^3-3x^2-9x+a=0$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ.

＜解＞

方程式を変形すると　　$-x^3+3x^2+9x=a$

方程式の実数の解は，曲線 $y=-x^3+3x^2+9x$ …… ① と，直線 $y=a$ …… ② の共有点の x 座標である．

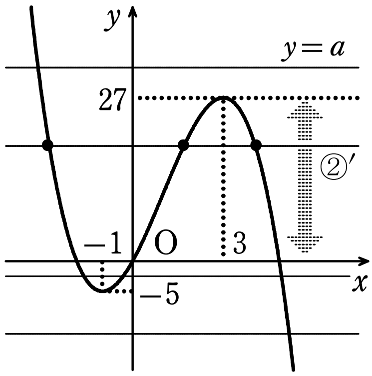
$f(x)=-x^3+3x^2+9x$ とおくと

$$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると　　　$x=-1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘



よって，曲線 ① は右図のようになる．

曲線 ① と直線 ② が $x>0$ で異なる 2 点で交わり，かつ $x<0$ で 1 点で交わる (グラフから ②′の場合) ような a の値の範囲を求めて

$$0<a<27$$

第 16 問【3 次関数と方程式・不等式】

$y=x^3-3x$ …… ①　　　$x^3-3x=0$ …… ②　　　$x^3-3x>0$ …… ③

$x^3-3x<0$ …… ④　とする．

(1)　関数 ① の極値を求めよ．

(2)　方程式 ② の実数の解を求めよ．

(3)　関数 ① について，$x=0,\ \pm2$ における y の値も求め，グラフをかけ．

(4)　不等式 ③ および ④ の解を求めよ．

＜解＞

(1)　① について　　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 1$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって，y は　$x=-1$ のとき極大値 2,

$x=1$ のとき極小値 -2 をとる．

(2)　$x^3-3x=0$ から　　$x(x^2-3)=0$

よって　　$x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$　　　ゆえに　　$x=0,\ \pm\sqrt{3}$

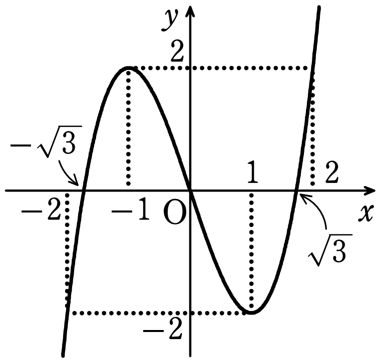
(3)　$x=0$ のとき　　$y=0$

$x=2$ のとき　　$y=2^3-3\cdot 2=2$

$x=-2$ のとき　　$y=(-2)^3-3\cdot(-2)=-2$

また，(2) から，① のグラフと x 軸の共有点の x 座標は　　　$x=0,\ \pm\sqrt{3}$

よって，① のグラフは〔図〕のようになる．



(4)　③ の解は，① のグラフの $y>0$ となる x の値の範囲であるから

$$-\sqrt{3}<x<0,\ \sqrt{3}<x$$

④ の解は，① のグラフの $y<0$ となる x の値の範囲であるから

$$x<-\sqrt{3},\ 0<x<\sqrt{3}$$

第 17 問【不等式の証明】

次の不等式を証明せよ．

(1)　$x\geqq 0$ のとき　$4x^3+28\geqq 9x^2+12x$　　　(2)　$x>0$ のとき　$x^3-3x^2+4x+1>0$

<解>

(1)　$f(x)=4x^3+28-(9x^2+12x)$ とおく．

$$f'(x)=12x^2-18x-12=6(2x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-\dfrac{1}{2},\ 2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	28	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる．
よって，$f(x)$ は $x=2$ のとき最小値 0 をとる．
ゆえに，$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)\geqq 0$
すなわち　　$4x^3+28\geqq 9x^2+12x$

(2)　$f(x)=x^3-3x^2+4x+1$ とおくと　　$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$

$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する，
また　　$f(0)=1>0$
よって，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)>0$
すなわち　　$x^3-3x^2+4x+1>0$

第 18 問【定積分の計算】

次の定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_1^2 (2x-1)\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^1 3(x-1)\,dx$　　(3)　$\displaystyle\int_0^1 (3x^2-1)\,dx$

(4)　$\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2+3x)\,dx$　　(5)　$\displaystyle\int_2^{-2} (1-x-x^2)\,dx$

(6)　$\displaystyle\int_0^{-1} (3x^2+6x+1)\,dx$　　(7)　$\displaystyle\int_{-2}^1 (6x^2+2x-3)\,dx$

(8)　$\displaystyle\int_{-1}^2 (t^2-4t+2)\,dt$　　(9)　$\displaystyle\int_3^2 (y^2-6y-4)\,dy$

＜解＞

(1)　(与式)$=\left[x^2-x\right]_1^2=(4-2)-(1-1)=2$

(2)　(与式)$=3\int_0^1(x-1)dx=3\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1=3\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)-0\right\}=-\frac{3}{2}$

(3)　(与式)$=\left[x^3-x\right]_0^1=(1-1)-0=0$

(4)　(与式)$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^1=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$\boxed{\text{別解}}$　(与式)$=\int_{-1}^1 x^2dx+3\int_{-1}^1 xdx=2\int_0^1 x^2dx+3\cdot 0$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{参考}}$　n が 0 以上の整数のとき　$\int_{-a}^a x^{2n+1}dx=0,\ \int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$

(5)　(与式)$=\left[x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_2^{-2}=\left(-2-2+\frac{8}{3}\right)-\left(2-2-\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}$

$\boxed{\text{別解}}$　(与式)$=-\int_{-2}^2(1-x-x^2)dx=-2\int_0^2(1-x^2)dx$

$$=-2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=-2\left\{\left(2-\frac{8}{3}\right)-0\right\}=\frac{4}{3}$$

(6)　(与式)$=\left[x^3+3x^2+x\right]_0^{-1}=(-1+3-1)-0=1$

(7)　(与式)$=\left[2x^3+x^2-3x\right]_{-2}^1=(2+1-3)-(-16+4+6)=6$

(8)　(与式)$=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+2t\right]_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}-8+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2-2\right)=3$

(9)　(与式)$=\left[\frac{y^3}{3}-3y^2-4y\right]_3^2=\left(\frac{8}{3}-12-8\right)-(9-27-12)=\frac{38}{3}$

第 19 問【有名式を利用して定積分を計算（β 函数）】

$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを用いて，次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

＜解＞

(1)　(与式)$\displaystyle=\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$

$$=-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot3^3=-\frac{9}{2}$$

(2)　$x^2-4x+2=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{2}$

したがって　(与式)$\displaystyle=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

第 20 問【微分と積分の関係・・・$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$】

次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を，それぞれ求めよ．

(1) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2+2x-3$　　(2) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2-5x+a$

＜解＞

(1)　等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=2x+2$

また，等式で $x=a$ とおくと　$0=a^2+2a-3$　これを解いて　$a=-3,\ 1$

(2)　等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=2x-5$

また，等式で $x=a$ とおくと　$0=a^2-5a+a$

よって　$a^2-4a=0$　これを解いて　$a=0,\ 4$

第 21 問【積分方程式】

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(1) $f(x)=x+\int_0^2 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$

＜解＞

(1) $a=\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=x+a$

ゆえに　$a=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (t+a)dt=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^2=2+2a$

よって　$a=-2$　　したがって　$f(x)=x-2$

(2) $a=\int_0^2 f(t)\,dt$，$b=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=x^2-ax+2b$

ゆえに　$a=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (t^2-at+2b)dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^2=\frac{8}{3}-2a+4b$$

よって　$9a-12b=8$ …… ①

また　$b=\int_0^1 f(t)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b$

よって　$3a-6b=2$ …… ②

①，② を解いて　$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{1}{3}$　　したがって　$f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

第 22 問【定積分と面積（基本)】

次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y=x^2+3$，$x=-1$，$x=2$　　(2) $y=-3x^2-1$，$x=1$，$x=4$

(3) $y=-x^2+2x-2$，$x=0$，$x=2$

＜解＞

求める面積を S とする.

(1)　$y=x^2+3$

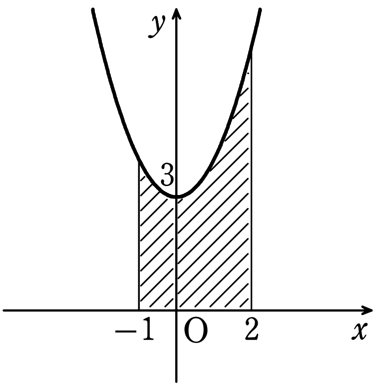
常に $y>0$ であるから　　$S=\int_{-1}^{2}(x^2+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{2}=12$

(2)　$y=-3x^2-1$

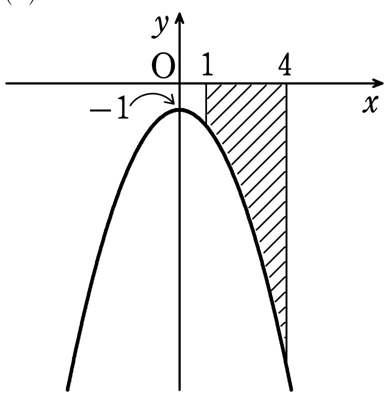
常に $y<0$ であるから　　$S=-\int_{1}^{4}(-3x^2-1)dx$

$$=\int_{1}^{4}(3x^2+1)dx=\left[x^3+x\right]_{1}^{4}=66$$

(1)



(2)



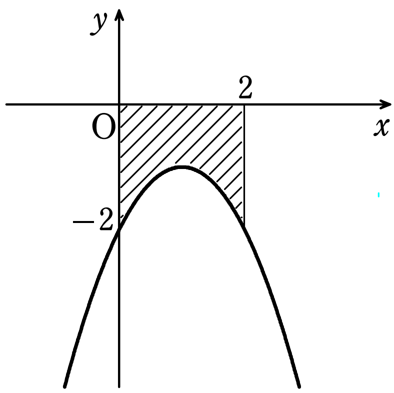
(3)　$y=-x^2+2x-2=-(x-1)^2-1$

常に $y<0$ であるから

$$S=-\int_{0}^{2}(-x^2+2x-2)dx$$

$$=-\left[-\frac{x^3}{3}+x^2-2x\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

(3)



第 23 問【定積分と囲まれた面積（放物線と放物線、放物線と直線）】

次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　$y=x^2-3x-2$，$y=-x^2+x-2$

(2)　$y=2x^2-6x+4$，$y=-3x^2+9x-6$

(3)　$y=x^2-3x+5$，$y=2x-1$

＜解＞

求める面積を S とする．

(1)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

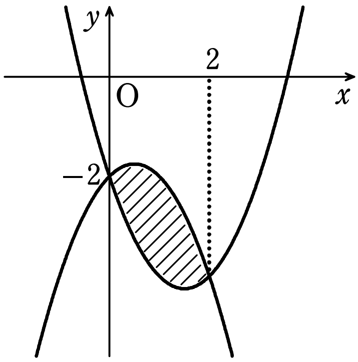
$$x^2-3x-2=-x^2+x-2 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-4x=0$$

を解いて　$x=0,\ 2$

区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $-x^2+x-2\geqq x^2-3x-2$ であるから

$$S=\int_0^2\{(-x^2+x-2)-(x^2-3x-2)\}dx$$

$$=2\int_0^2(-x^2+2x)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_0^2\{(-x^2+x-2)-(x^2-3x-2)\}dx$$

$$=-2\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-0)^3=\frac{8}{3}$$

(2)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$$2x^2-6x+4=-3x^2+9x-6$$

すなわち　$5x^2-15x+10=0$ を解いて

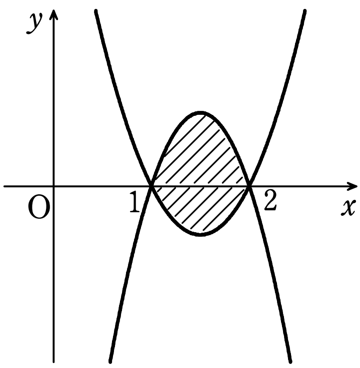
$$x=1,\ 2$$

区間 $1\leqq x\leqq 2$ で $-3x^2+9x-6\geqq 2x^2-6x+4$ であるから

$$S=\int_1^2\{(-3x^2+9x-6)-(2x^2-6x+4)\}dx$$

$$=5\int_1^2(-x^2+3x-2)dx$$

$$=5\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=\frac{5}{6}$$



(3)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-3x+5=2x-1 \quad \text{すなわち} \quad x^2-5x+6=0$$

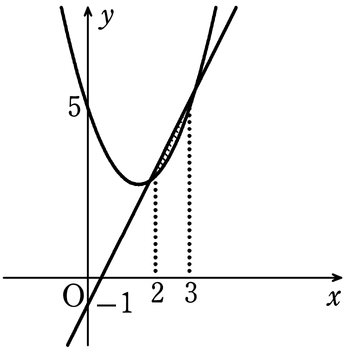
を解いて　　　$x=2,\ 3$

区間 $2 \leqq x \leqq 3$ で $2x-1 \geqq x^2-3x+5$ であるから

$$S=\int_2^3 \{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx$$

$$=\int_2^3 (-x^2+5x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3=\frac{1}{6}$$



$\boxed{\text{別解}}$　[積分の計算]

$$S=\int_2^3 \{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx$$

$$=-\int_2^3 (x-2)(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-2)^3=\frac{1}{6}$$

第 24 問【囲まれた面積の最小値】

放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=mx+2$ で囲まれた部分の面積 S を m で表せ．また，S の最小値とそのときの m の値を求めよ．

＜解＞

放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=mx+2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x+1=mx+2 \qquad \text{すなわち} \qquad x^2-(m+2)x-1=0 \ \cdots\cdots ①$$

の実数の解である．

① について　　$D=(m+2)^2+4>0$

よって，① は異なる 2 つの実数の解をもつ．それらを α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$$S=\int_\alpha^\beta \{(mx+2)-(x^2-2x+1)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\beta-\alpha=\sqrt{(m+2)^2+4}=\sqrt{m^2+4m+8}$ であるから　　$S=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{m^2+4m+8}\right)^3$

$S=\dfrac{1}{6}\left\{\sqrt{(m+2)^2+4}\right\}^3$ であるから，S は $m=-2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{6}(\sqrt{4})^3=\dfrac{4}{3}$ をとる．

第 25 問【絶対値と定積分】

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^4 |x-3|\,dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|\,dx$

＜解＞

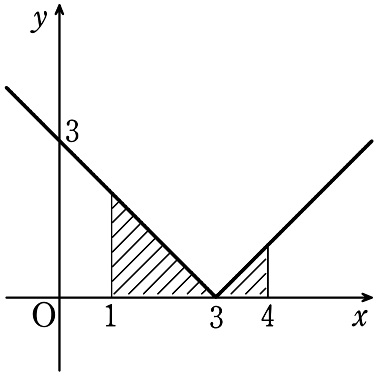
(1) $1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$|x-3| = -(x-3)$

$3 \leqq x \leqq 4$ のとき　$|x-3| = x-3$

よって　$\displaystyle(\text{与式}) = \int_1^3 \{-(x-3)\}\,dx + \int_3^4 (x-3)\,dx$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^4$$

$$= \frac{5}{2}$$



(2) $|x^2-4| = |(x+2)(x-2)|$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|x^2-4| = -(x^2-4)$

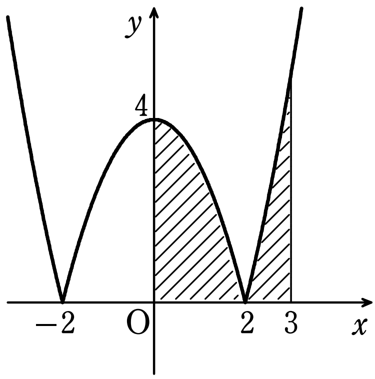
$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$|x^2-4| = x^2-4$

よって

$$(\text{与式}) = \int_0^2 \{-(x^2-4)\}\,dx + \int_2^3 (x^2-4)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

$$= \frac{23}{3}$$



第 26 問【絶対値を含む関数の定積分の応用】

$0 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)=\int_x^{x+1}|t-2|dt$ とおく．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

＜解＞

(1)　[1]　$x+1 \leqq 2$ すなわち $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$x \leqq t \leqq x+1$ で $t-2 \leqq 0$ であるから

$$f(x)=\int_x^{x+1}\{-(t-2)\}dt=\left[-\frac{t^2}{2}+2t\right]_x^{x+1}$$

$$=-\frac{(x+1)^2-x^2}{2}+2\{(x+1)-x\}=-x+\frac{3}{2}$$

[2]　$x \leqq 2 \leqq x+1$ すなわち $1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$x \leqq t \leqq 2$ で　$t-2 \leqq 0$,　　$2 \leqq t \leqq x+1$ で　$t-2 \geqq 0$

であるから

$$f(x)=\int_x^2\{-(t-2)\}dt+\int_2^{x+1}(t-2)dt$$

$$=\left[-\frac{t^2}{2}+2t\right]_x^2+\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_2^{x+1}=x^2-3x+\frac{5}{2}$$

以上から，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　$f(x)=-x+\frac{3}{2}$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき　　$f(x)=x^2-3x+\frac{5}{2}$

(2)　$1 \leqq x \leqq 2$ のとき　　$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$0 \leqq x \leqq 2$ における $y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分のようになる．

よって，$f(x)$ は

$x=0$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$,

$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$　をとる．