# いろいろな関数

# 重要例題集　いろいろな関数

第 1 問【分数関数のグラフ】

次の関数のグラフをかけ．また，その漸近線の方程式を求めよ．

(1)　$y=-\dfrac{4}{x}$　　(2)　$y=\dfrac{2}{x}-1$　　(3)　$y=\dfrac{1}{x-2}$

(4)　$y=2-\dfrac{1}{x+1}$　　(5)　$y=\dfrac{x}{x+2}$　　(6)　$y=\dfrac{2x-1}{1-x}$

＜解＞

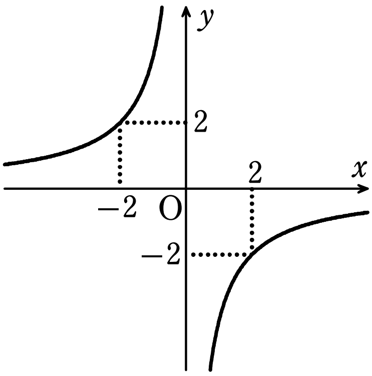
(1)　$y=-\dfrac{4}{x}$ のグラフは，第 2，第 4 象限にある双曲線で，〔図〕のようになる．

また，漸近線の方程式は　$x=0$，$y=0$

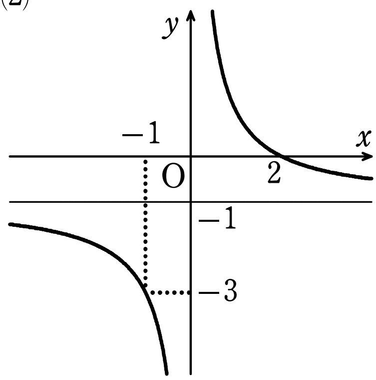
(2)　$y=\dfrac{2}{x}-1$ のグラフは，双曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ を $y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したもので，

〔図〕のようになる．また，漸近線の方程式は　$x=0$，$y=-1$

(1)



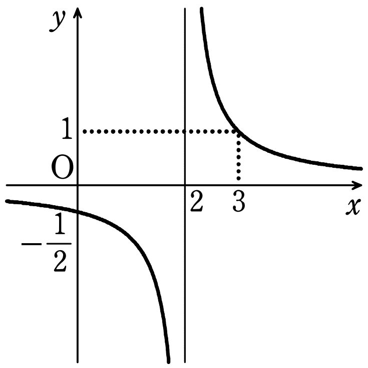

(2)



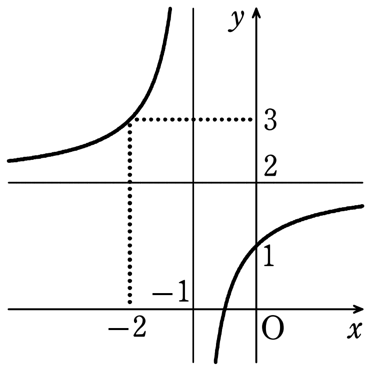
(3) $y=\dfrac{1}{x-2}$ のグラフは，双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ を $x$ 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．また，漸近線の方程式は　$x=2$，$y=0$

(4) $y=2-\dfrac{1}{x+1}$ のグラフは，双曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ を $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．また，漸近線の方程式は　$x=-1$，$y=2$

(3)




(4)



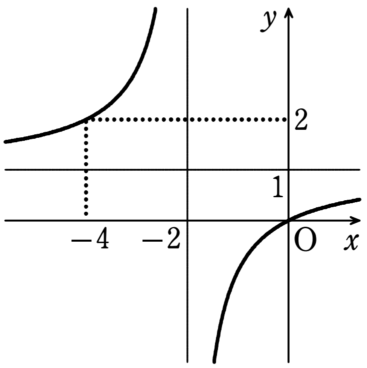

(5) $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+2-2}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$

よって，$y=\dfrac{x}{x+2}$ のグラフは，双曲線 $y=-\dfrac{2}{x}$ を $x$ 軸方向に $-2$，$y$ 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．また，漸近線の方程式は　$x=-2$，$y=1$

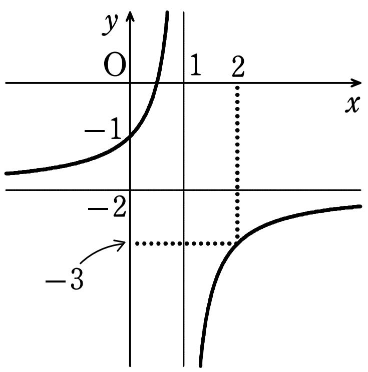
(6) $\dfrac{2x-1}{1-x}=\dfrac{-2x+1}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)-1}{x-1}=-2-\dfrac{1}{x-1}$

よって，$y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ のグラフは，双曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ を $x$ 軸方向に 1，$y$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．また，漸近線の方程式は　$x=1$，$y=-2$

(5)




(6)



第 2 問【分数関数のグラフを使って不等式を解く】

次の不等式を満たす $x$ の値の範囲を求めよ．

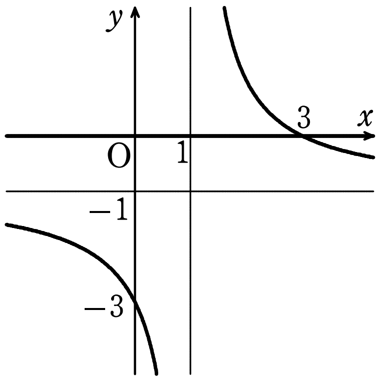
(1) $\dfrac{3-x}{x-1}>0$　　　　(2) $\dfrac{2x-1}{x+1}\geqq -1$

＜解＞

(1)　求める解は双曲線 $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ が直線 $y=0$ より上方にある $x$ の値の範囲であるから

$$1<x<3$$

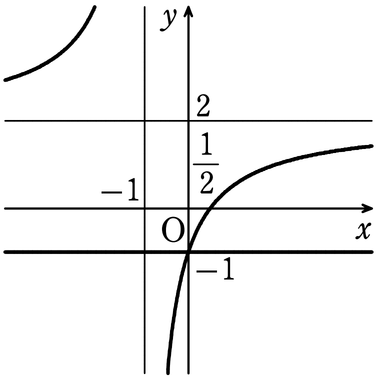
(1)




(2)　求める解は双曲線 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ が直線 $y=-1$ より上方にあるか，または共有点をもつような $x$ の値の範囲であるから

$$x<-1,\ 0\leqq x$$

(2)



第 3 問【分数関数の決定】

次のような双曲線をグラフにもつ関数を $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形で表せ.

(1)　$x=2$，$y=1$ を漸近線として，点 $(1,\ 0)$ を通る.

(2)　$x=-1$，$y=2$ を漸近線として，原点 $(0,\ 0)$ を通る.

＜解＞

(1)　2 直線 $x=2$，$y=1$ が漸近線であるから，求める関数は $y=\dfrac{k}{x-2}+1$ $(k\neq 0)$ とおける．このグラフが点 $(1,\ 0)$ を通るから　$0=\dfrac{k}{1-2}+1$　ゆえに　$k=1$

よって，求める関数は　$y=\dfrac{1}{x-2}+1$　すなわち　$y=\dfrac{x-1}{x-2}$

(2)　2 直線 $x=-1$，$y=2$ が漸近線であるから，求める関数は $y=\dfrac{k}{x+1}+2$ $(k\neq 0)$ とおける．このグラフが原点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0=\dfrac{k}{0+1}+2$　ゆえに　$k=-2$

よって，求める関数は　$y=\dfrac{-2}{x+1}+2$　すなわち　$y=\dfrac{2x}{x+1}$

第 4 問【無理関数のグラフ】

次の関数のグラフをかけ．また，(5)，(6) については，その値域も求めよ.

(1)　$y=\sqrt{x-1}$

(2)　$y=-\sqrt{x+1}$

(3)　$y=2\sqrt{3-x}$

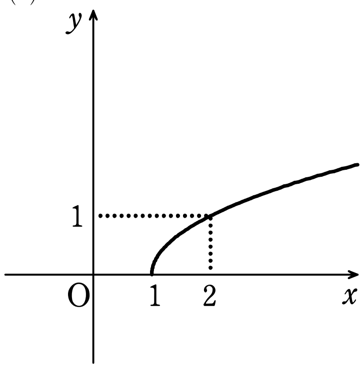
(4)　$y=-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x}$

＜解＞

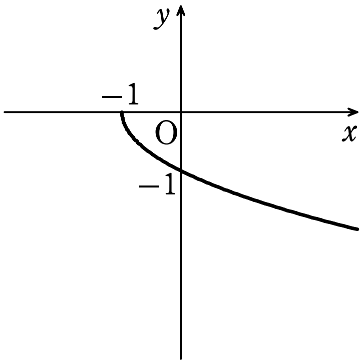
(1)　$y=\sqrt{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $1$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．

(2)　$y=-\sqrt{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．

(1)




(2)



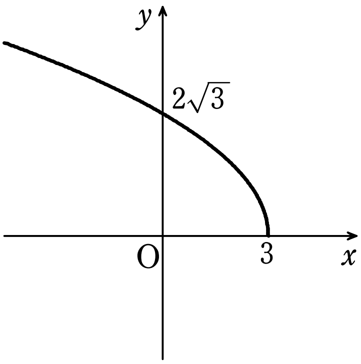

(3)　$2\sqrt{3-x}=2\sqrt{-(x-3)}$

よって，$y=2\sqrt{-x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $3$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．

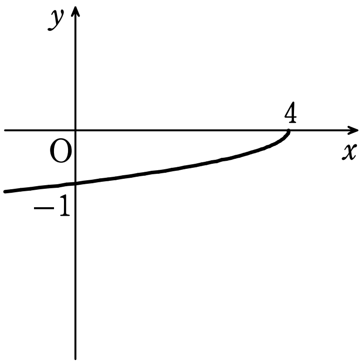
(4)　$-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{-(x-4)}$

よって，$y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{-x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $4$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる．

(3)




(4)



第 5 問【無理関数の決定】

次の条件に適するように，定数 $a$ の値を定めよ．

(1)　関数 $y=\sqrt{2x-6}$　$(3\leqq x\leqq a)$ の値域が $\{y \mid 0\leqq y\leqq 2\}$

(2)　関数 $y=\sqrt{a-2x}$ の定義域が $\{x \mid x\leqq 2\}$

(3)　関数 $y=\sqrt{x+a}$ のグラフが点 $(-2,\ 2)$ を通る．

＜解＞

(1)　$\sqrt{2x-6}=\sqrt{2(x-3)}$

よって，$y=\sqrt{2x-6}$ のグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを $x$ 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，図のようになる．

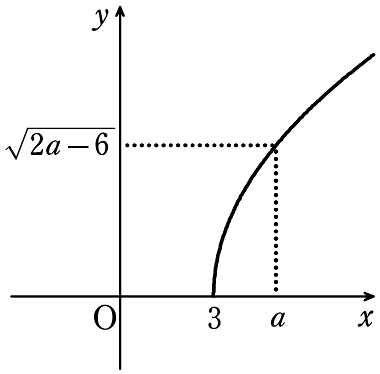
ゆえに，$3\leqq x\leqq a$ のとき

$$0\leqq y\leqq \sqrt{2a-6}$$

これが $0\leqq y\leqq 2$ と一致するから

$\sqrt{2a-6}=2$　　よって　$2a-6=4$

ゆえに　　$a=5$




(2)　$a-2x\geqq 0$ であるから，定義域は　$x\leqq \dfrac{a}{2}$

これが $x\leqq 2$ と一致するから　$\dfrac{a}{2}=2$

よって　　$a=4$

(3)　グラフが点 $(-2,\ 2)$ を通るから　　$2=\sqrt{-2+a}$

両辺を平方して　　$4=-2+a$　　よって　　$a=6$

第 6 問【無理関数のグラフとの共有点】

次の各組において，2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ．

(1)　$y=\sqrt{x+3}$，$y=2x$　　(2)　$y=-\sqrt{x}$，$y=2-x$

(3)　$y=\sqrt{2-x}$，$y=\dfrac{1}{2}x-1$　　(4)　$y=-\sqrt{x+3}$，$y=-(x+1)$

＜解＞

(1)　共有点の $x$ 座標は次の等式を満たす．

$$\sqrt{x+3}=2x \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を平方すると　$x+3=4x^2$　整理すると　$4x^2-x-3=0$

これを解いて　$x=1,\ -\dfrac{3}{4}$

$x=1$ のとき，① において　$(\text{左辺})=\sqrt{1+3}=2$，$(\text{右辺})=2\cdot1=2$

$x=-\dfrac{3}{4}$ のとき，① において　$(\text{左辺})=\sqrt{-\dfrac{3}{4}+3}=\dfrac{3}{2}$，$(\text{右辺})=2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{3}{2}$

ゆえに，① を満たすのは　$x=1$　$x=1$ のとき　$y=2$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 2)$

(2)　共有点の $x$ 座標は次の等式を満たす．

$$-\sqrt{x}=2-x \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を平方すると　$x=(2-x)^2$　整理すると　$x^2-5x+4=0$

これを解いて　$x=1,\ 4$

$x=1$ のとき，① において　$(\text{左辺})=-\sqrt{1}=-1$，$(\text{右辺})=2-1=1$

$x=4$ のとき，① において　$(\text{左辺})=-\sqrt{4}=-2$，$(\text{右辺})=2-4=-2$

ゆえに，① を満たすのは　$x=4$　$x=4$ のとき　$y=-2$

よって，共有点の座標は　$(4,\ -2)$

(3)　共有点の $x$ 座標は次の等式を満たす．

$$\sqrt{2-x}=\frac{1}{2}x-1 \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を平方すると　$2-x=\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2$　整理すると　$x^2=4$

これを解いて　$x=\pm2$

$x=2$ のとき，① において　$(\text{左辺})=\sqrt{2-2}=0$，$(\text{右辺})=\dfrac{1}{2}\cdot2-1=0$

$x=-2$ のとき，① において　$(\text{左辺})=\sqrt{2-(-2)}=2$，$(\text{右辺})=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)-1=-2$

ゆえに，① を満たすのは　$x=2$　$x=2$ のとき　$y=0$

よって，共有点の座標は　$(2,\ 0)$

(4)　共有点の $x$ 座標は次の等式を満たす．

$$-\sqrt{x+3}=-(x+1) \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を平方すると　$x+3=(x+1)^2$　整理すると　$x^2+x-2=0$

これを解いて　$x=-2,\ 1$

$x=-2$ のとき，① において　$(\text{左辺})=-\sqrt{-2+3}=-1$，$(\text{右辺})=-(-2+1)=1$

$x=1$ のとき，① において　$(\text{左辺})=-\sqrt{1+3}=-2$，$(\text{右辺})=-(1+1)=-2$

ゆえに，① を満たすのは　$x=1$　$x=1$ のとき　$y=-2$

よって，共有点の座標は　$(1,\ -2)$

## 第 7 問【無理関数のグラフを使って不等式を解く】

グラフを用いて，次の不等式を解け．

(1) $\sqrt{x} \geqq 3$　　(2) $\sqrt{x+2} < 2$

(3) $\sqrt{3-x} < 1$

＜解＞

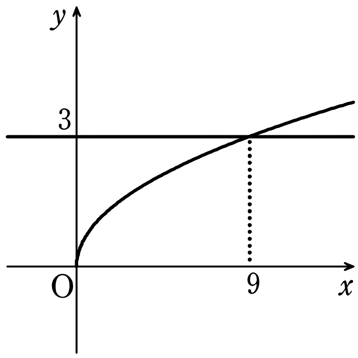
(1) $\sqrt{x}=3$ を解く．

両辺を平方して　$x=9$

ゆえに，$y=\sqrt{x}$，$y=3$ のグラフの共有点の座標は

$(9,\ 3)$

求める不等式の解は，$y=\sqrt{x}$ のグラフが $y=3$ のグラフより上方にあるか，または共有点をもつような $x$ の値の範囲である．よって　$x \geqq 9$




(2) $\sqrt{x+2}=2$ を解く．

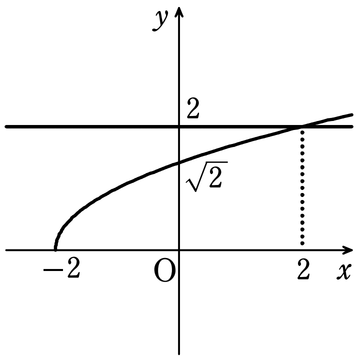
両辺を平方して整理すると　$x=2$

ゆえに，$y=\sqrt{x+2}$，$y=2$ のグラフの共有点の座標は

$(2,\ 2)$

求める不等式の解は，$y=\sqrt{x+2}$ のグラフが $y=2$ のグラフより下方にある $x$ の値の範囲である．

よって　$-2 \leqq x < 2$




(3) $\sqrt{3-x}=1$ を解く．

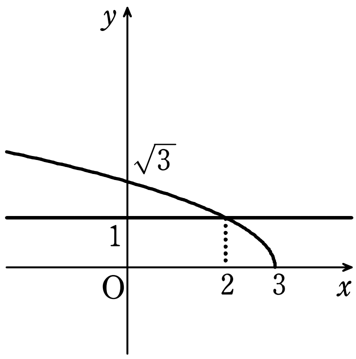
両辺を平方して整理すると　$x=2$

ゆえに，$y=\sqrt{3-x}$，$y=1$ のグラフの共有点の座標は

$(2,\ 1)$

求める不等式の解は，$y=\sqrt{3-x}$ のグラフが $y=1$ のグラフより下方にある $x$ の値の範囲である．

よって　$2 < x \leqq 3$



第 8 問【無理関数のグラフと直線の共有点の個数】

2 つの関数 $y=\sqrt{x+1}$，$y=x+a$ のグラフの共有点の個数を調べよ．

＜解＞

$\sqrt{x+1}=x+a$ の両辺を平方すると　　$x+1=x^2+2ax+a^2$

すなわち　　$x^2+(2a-1)x+a^2-1=0$

判別式を $D$ とすると　　$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=-4a+5$

よって，$D=0$ すなわち $a=\dfrac{5}{4}$ のとき，$y=x+a$ のグラフは $y=\sqrt{x+1}$ のグラフと接する．また，$y=x+a$ のグラフが点 $(-1,\ 0)$ を通るとき

$$0=-1+a \qquad ゆえに \quad a=1$$

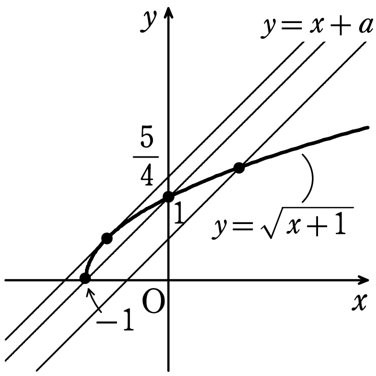
グラフより，共有点の個数は

$a<1$ のとき　1 個

$1\leqq a<\dfrac{5}{4}$ のとき　2 個

$a=\dfrac{5}{4}$ のとき　1 個

$\dfrac{5}{4}<a$ のとき　なし




第 9 問【逆関数 1 】

次の関数の逆関数を求めよ．また，その逆関数のグラフをかけ．

(1)　$y=4x+6$

(2)　$y=2x-1$　$(-1\leqq x\leqq 1)$

(3)　$y=x^2+1$　$(x\geqq 0)$

(4)　$y=-\sqrt{2x-3}$

＜解＞

(1)　$y=4x+6$ を $x$ について解くと　$x=\dfrac{1}{4}y-\dfrac{3}{2}$

$x$ と $y$ を入れ替えて，逆関数は　$y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}$　グラフは〔図〕

(2)　この関数の値域は　$-3\leqq y\leqq 1$

$y=2x-1$ を $x$ について解くと　$x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}$

よって，求める逆関数は $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}$　$(-3\leqq y\leqq 1)$ において $x$ と $y$ を入れ替えて

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$　$(-3\leqq x\leqq 1)$　グラフは〔図〕

(3)　この関数の値域は　$y\geqq 1$

$y=x^2+1$ $(x\geqq 0)$ から　$x=\sqrt{y-1}$　$(y\geqq 1)$

$x$ と $y$ を入れ替えて，逆関数は　$y=\sqrt{x-1}$　グラフは〔図〕

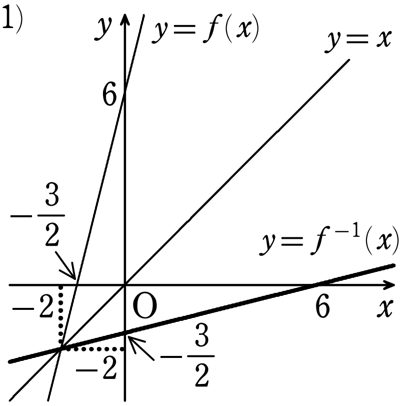
(4)　この関数の値域は　$y\leqq 0$

$y=-\sqrt{2x-3}$ の両辺を平方すると　$y^2=2x-3$　ゆえに　$x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{3}{2}$

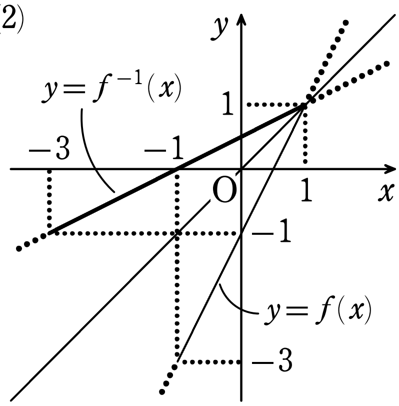
よって，求める逆関数は $x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{3}{2}$　$(y\leqq 0)$ において $x$ と $y$ を入れ替えて

$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$　$(x\leqq 0)$　グラフは〔図〕

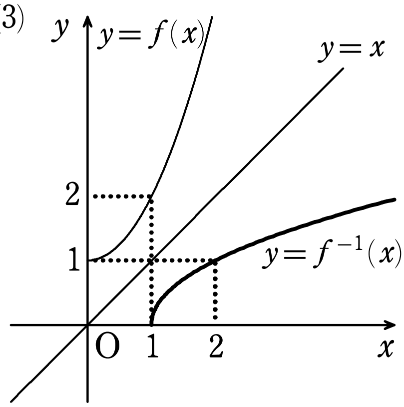
(1)



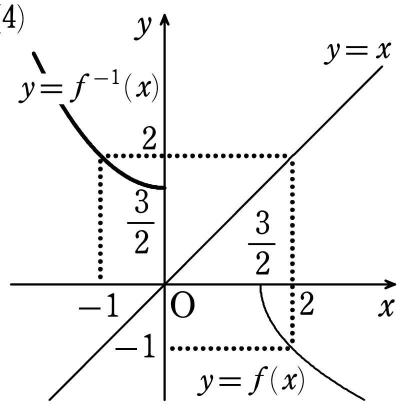

(2)




(3)




(4)




（もとの関数を $y=f(x)$，その逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とする．）

第 10 問【逆関数２】

次の関数の逆関数を求めよ．

(1)　$y=5^x$

(2)　$y=\log_2(x-1)$

(3)　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(4)　$y=\dfrac{x}{x+1}$　$(x\geqq 0)$

＜解＞

(1)　この関数の値域は　$y>0$

$y=5^x$ から　$x=\log_5 y\ (y>0)$　　よって，逆関数は　$y=\log_5 x$

(2)　$y=\log_2(x-1)$ から　$x=2^y+1$　　よって，逆関数は　$y=2^x+1$

(3)　$\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

よって，$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ の値域は　$y \neq 2$

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ の両辺に $x-1$ を掛けると

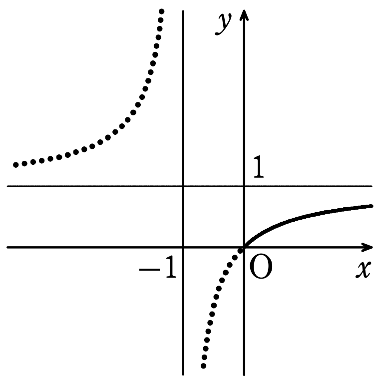
$(x-1)y=2x+1$　　ゆえに　$(y-2)x=y+1$

$y \neq 2$ であるから　$x=\dfrac{y+1}{y-2}$　　よって，逆関数は　$y=\dfrac{x+1}{x-2}$

(4)　$\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$

また，$x=0$ のとき　$y=0$

よって，$y=\dfrac{x}{x+1}$　$(x \geqq 0)$ のグラフは右図の実線部分であり，値域は　$0 \leqq y<1$




$y=\dfrac{x}{x+1}$ の両辺に $x+1$ を掛けると

$(x+1)y=x$　　ゆえに　$(y-1)x=-y$

$y \neq 1$ であるから　$x=-\dfrac{y}{y-1}$

よって，逆関数は　$y=-\dfrac{x}{x-1}$　$(0 \leqq x<1)$

第 11 問【無理関数とその逆関数の共有点】

> $f(x)=\sqrt{x+1}$ とするとき
>
> (1)　関数 $y=f(x)$ のグラフと，その逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフをかけ．
>
> (2)　不等式 $f^{-1}(x) \geqq f(x)$ を満たす $x$ の値の範囲を求めよ．

＜解＞

(1)　$y=\sqrt{x+1}$ の値域は　　$y \geqq 0$

$y=\sqrt{x+1}$ の両辺を平方すると

$y^2=x+1$　　　よって　$x=y^2-1$

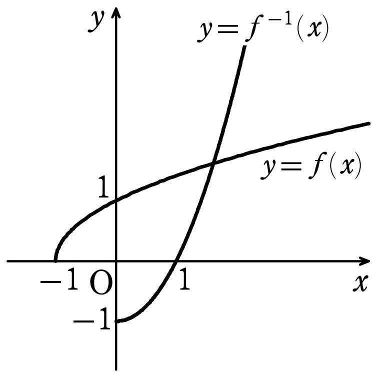
したがって，$y=f(x)$ の逆関数は

$x=y^2-1$　$(y \geqq 0)$

において $x$ と $y$ を入れ替えて

$y=x^2-1$　$(x \geqq 0)$

グラフは〔図〕




(2)　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフが直線 $y=x$ に関して対称であり，図より共有点の $x$ 座標は $x^2-1=x$ $(x \geqq 0)$ を満たす実数のみである．

$x^2-x-1=0$ を解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　$x \geqq 0$ から　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

共有点は直線 $y=x$ 上にあるから，その座標は　$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

不等式の解は，$y=f^{-1}(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフより上方にあるか，または

共有点をもつような $x$ の値の範囲であるから　$x \geqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

第 12 問【合成関数を作る】

次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ．

(1)　$f(x)=2x+1$，$g(x)=x(x-1)$　　(2)　$f(x)=3x+2$，$g(x)=x^2+1$

(3)　$f(x)=\dfrac{2}{x}$，$g(x)=2x^2+1$　　(4)　$f(x)=2^x$，$g(x)=\log_4 x$

＜解＞

(1)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)(2x+1-1)=4x^2+2x$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x(x-1))=2x(x-1)+1=2x^2-2x+1$

(2)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+2)=(3x+2)^2+1=9x^2+12x+5$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=3(x^2+1)+2=3x^2+5$

(3)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{2}{x}\right)=2\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+1=\dfrac{8}{x^2}+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2+1)=\dfrac{2}{2x^2+1}$

(4)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2^x)=\log_4 2^x=x\log_4 2=x\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 4}=\dfrac{x}{2}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_4 x)=2^{\log_4 x}=2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 4}}=2^{\log_2\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

第 13 問【合成関数の性質】

$f(x)=x-1,\ \ g(x)=2x-3,\ \ h(x)=2x^2$ について，次のことを示せ．

$$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$$

＜解＞

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=2(x-1)-3=2x-5$

ゆえに　$(h\circ(g\circ f))(x)=h(g\circ f(x))=h(2x-5)=2(2x-5)^2$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(2x-3)=2(2x-3)^2$

ゆえに　$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(x-1)=2\{2(x-1)-3\}^2=2(2x-5)^2$

よって　$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

第 14 問【合成関数と方程式】

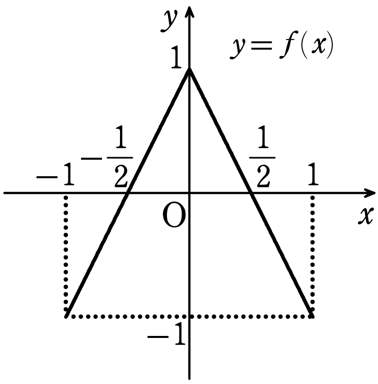
関数 $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (-1\leqq x\leqq 0) \\ -2x+1 & (0\leqq x\leqq 1) \end{cases}$ について

(1) $y=(f\circ f)(x)$ のグラフをかけ.

(2) $(f\circ f)(a)=f(a)$ となる $a$ の値を求めよ.

＜解＞

(1) $y=f(x)$ のグラフは〔図 1〕のようになる.



〔図 1〕

[1] $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$0\leqq f(x)\leqq 1$ であるから

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=-2f(x)+1$$

[2] $-1\leqq x\leqq-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき

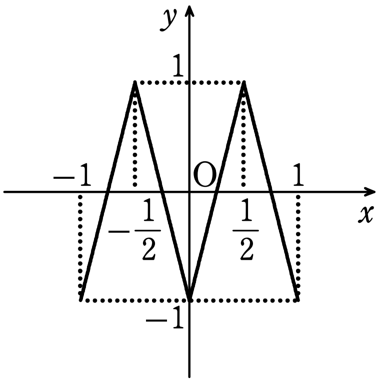
$-1\leqq f(x)\leqq 0$ であるから

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=2f(x)+1$$

よって

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} 4x+3 & \left(-1\leqq x\leqq-\dfrac{1}{2}\right) \\ -4x-1 & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0\right) \\ 4x-1 & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ -4x+3 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right) \end{cases}$$

グラフは〔図 2〕



〔図 2〕

(2) $(f\circ f)(a)=f(a)$ となる $a$ の値は，$y=(f\circ f)(x)$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフの共有点の $x$ 座標に等しい．

2 つのグラフをまとめてかくと，〔図 3〕のようになる．

[1] $0\leqq x\leqq \frac{1}{2}$ のとき

$$(f\circ f)(x)=4x-1,\quad f(x)=-2x+1$$

よって，共有点の $x$ 座標は

$4x-1=-2x+1$ から　　$x=\frac{1}{3}$

[2] $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき

$$(f\circ f)(x)=-4x+3,\quad f(x)=-2x+1$$

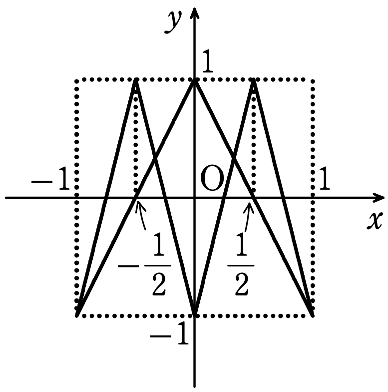
よって，共有点の $x$ 座標は

$-4x+3=-2x+1$ から　　$x=1$

2 つのグラフは，ともに $y$ 軸に関して対称であるから，

$x=-1,\ -\frac{1}{3}$ でも共有点をもつ．

以上から　　$a=\pm 1,\ \pm\frac{1}{3}$



〔図 3〕