数列・関数の極限

重要例題集　数列・関数の極限

第 1 問【極限の考え方と性質】

次の事柄は正しいか．正しくないものはその反例をあげよ．ただし，a は定数とする．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

＜解＞

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ から

$n \longrightarrow \infty$ のとき　$a_n > 0$，$|a_n| \longrightarrow +\infty$，　$b_n < 0$，$|b_n| \longrightarrow +\infty$

よって，$n \longrightarrow \infty$ のとき　$a_n b_n < 0$，$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \longrightarrow +\infty$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$　　よって，正しい．

(2) 正しくない．

(反例)　$a_n = n+1$，$b_n = n$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ であるが

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 1 \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$$

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = a - 0 = a$　　よって，正しい．

第 2 問【数列の極限の計算（１）】

一般項が次の式で表される数列の極限を求めよ．

(1) $n^3 - 2n$　　(2) $4n - n^3$　　(3) $n - \sqrt{n}$

(4) $\dfrac{n^2 - 2n}{n+1}$　　(5) $\dfrac{n^2 - 3n}{5n+4}$　　(6) $\dfrac{-n^3+1}{3n^2-2}$

(7) $\sqrt{n-1} - \sqrt{n}$　　(8) $\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$　　(9) $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}}$

＜解＞

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(n^3-2n)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)=+\infty$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(4n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{4}{n^2}-1\right)=-\infty$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}=+\infty$

(5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n\left(5+\frac{4}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}{5+\frac{4}{n}}=+\infty$

(6) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-1+\frac{1}{n^3}\right)}{3-\frac{2}{n^2}}=-\infty$

(7) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=0$

(8) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-2n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=0$

(9) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n})}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}{(2n+3)-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}{3}=+\infty$

第３問【等比数列の極限の計算（１）】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

(1) $\dfrac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}$　　(2) $\dfrac{2^n}{3^n-4}$　　(3) $\dfrac{4^n-1}{3^n+5}$

(4) $\dfrac{2^n-(-3)^n}{(-3)^n+2^n}$　　(5) $\dfrac{(-3)^n}{2^n-1}$

＜解＞

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{5}{2^n}}{1+\dfrac{3}{2^n}}=\frac{3-0}{1+0}=3$　　よって，3 に収束する．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{4}{3^n}}=\frac{0}{1-0}=0$　　よって，0 に収束する．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-1}{3^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{5}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}{1+\dfrac{5}{3^n}}=+\infty$

よって，$+\infty$ に発散する．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-(-3)^n}{(-3)^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$　　よって，-1 に収束する．

(5) $\displaystyle\frac{(-3)^n}{2^n-1}=\left(-\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^n}}$

数列 $\left\{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^n}}\right\}$ は 1 に収束し，数列 $\left\{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$ は振動するから，与えられた数列は振動する．

第 4 問【数列の極限計算（2）】

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

＜解＞

(1) $(与式)=\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}$

(2) $(与式)=\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{n}{2}\right\}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=-\frac{1}{2}$$

第 5 問【等比数列の極限が収束する条件】

数列 $\{(x^2-2x-1)^n\}$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．

＜解＞

<u>与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1<x^2-2x-1\leqq1$</u>

$-1<x^2-2x-1$ から　$x^2-2x>0$　　よって　$x(x-2)>0$

ゆえに　$x<0,\ 2<x$　……①

$x^2-2x-1\leqq1$ から　$x^2-2x-2\leqq0$

ゆえに　$1-\sqrt{3}\leqq x\leqq1+\sqrt{3}$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$1-\sqrt{3}\leqq x<0,\ 2<x\leqq1+\sqrt{3}$

第 6 問【等比数列の極限の計算（２）】

次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}$

＜解＞

(1) [1] $|r|>1$ のとき　　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\frac{1}{r^{2n}}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=r$

[2] $r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$　　よって　$\displaystyle(\text{与式})=\frac{1-1}{1+1}=0$

[3] $|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$　　よって　$\displaystyle(\text{与式})=\frac{0-1}{0+1}=-1$

[4] $r=-1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n+1}=-1,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$　　よって　$\displaystyle(\text{与式})=\frac{-1-1}{1+1}=-1$

以上から，求める極限は

$|r|>1$ のとき　r,　　$r=1$ のとき　0,　　$-1\leqq r<1$ のとき　-1

(2) [1] $|r|>1$ のとき　　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^{n+1}}+1-r}{\frac{1-r}{r^{n+1}}+1}=1-r$

[2] $r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}r^{n+2}=1$　　よって　$\displaystyle(\text{与式})=\frac{1+1-1}{1-1+1}=1$

[3] $|r|<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}r^{n+2}=0$　　よって　$\displaystyle(\text{与式})=\frac{1+0-0}{1-r+0}=\frac{1}{1-r}$

[4] $r=-1$ のとき

$$\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\frac{1+(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}}{1-(-1)+(-1)^{n+1}}=\frac{1-2(-1)^n}{2-(-1)^n}=\frac{3}{(-1)^n-2}+2$$

よって，振動して極限はない．

以上から，求める極限は

$|r|>1$ のと　$1-r$,　　$r=1$ のとき　1

$|r|<1$ のとき　$\dfrac{1}{1-r}$,　　$r=-1$ のとき　極限はない

第 7 問【無限級数の計算】

次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots\cdots$

(3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n+1}+\cdots\cdots$

＜解＞

第 n 項までの部分和を S_n とする．

(1) $\boxed{S_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{n+2}}$

よって　$\underline{\lim_{n\to\infty} S_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$-\dfrac{1}{2}$

(2) $\boxed{S_n=\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって　$\underline{\lim_{n\to\infty} S_n}=\dfrac{1}{3}$　　ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{3}$

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\neq 0}$　　より，

この無限級数は発散する．

第 8 問【漸化式と極限<やや難>】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ で定義されている．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　等式 $\alpha=\sqrt{\alpha+2}$ を満たす実数 α の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた α に対して，$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{2}|a_n-\alpha|$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

<解>

(1)　$\alpha=\sqrt{\alpha+2}$　……①

① の両辺を平方すると　$\alpha^2=\alpha+2$

ゆえに　$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$

よって　$\alpha=-1,\ 2$

このうち ① を満たすのは　$\alpha=2$

(2)　(1) の結果と，与えられた漸化式から

$$\boxed{\begin{aligned}|a_{n+1}-\alpha|&=|a_{n+1}-2|=\left|\sqrt{a_n+2}-2\right|\\&=\left|\frac{(a_n+2)-2^2}{\sqrt{a_n+2}+2}\right|=\frac{|a_n-2|}{\sqrt{a_n+2}+2}\end{aligned}}$$

$\sqrt{a_n+2}+2\geqq2$ であるから

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_n-2|=\frac{1}{2}|a_n-\alpha|$$

(3)
$$|a_n-2|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-2|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-2|\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|$$

よって　$0\leqq|a_n-2|\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left|\sqrt{2}-2\right|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}0=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|\sqrt{2}-2\right|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-2|=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

第 9 問【関数の極限の計算（１）】

次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x)$　(2) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1}$　(3) $\lim_{x \to 0} 2^x$

(4) $\lim_{x \to 1} \log_2 x$　(5) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}$　(6) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-3}$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$　(8) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2}$　(9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6}$

＜解＞

(1) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$

(2) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$

(3) $\lim_{x \to 0} 2^x = 2^0 = 1$

(4) $\lim_{x \to 1} \log_2 x = \log_2 1 = 0$

(5) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$

(6) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-3} = \frac{2^2}{2-3} = -4$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

(8) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x+2)}{x+3} = \frac{2(2+2)}{2+3} = \frac{8}{5}$

第 10 問【左の極限・右の極限（１）】

次の関数 $f(x)$ について，$x \longrightarrow 2-0$，$x \longrightarrow 2+0$，$x \longrightarrow 2$ のときの極限を調べよ．

(1) $f(x) = \frac{1}{x-2}$　(2) $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$　(3) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

＜解＞

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=\underline{-\infty}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=\underline{+\infty}$　よって，$x\longrightarrow 2$ のときの極限はない．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{(x-2)^2}=\underline{+\infty}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{x}{(x-2)^2}=\underline{+\infty}$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}=+\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=\underline{-\infty}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=\underline{+\infty}$　よって，$x\longrightarrow 2$ のときの極限はない．

第 11 問【右の極限・左の極限（２）】

次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2-x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{(x-2)^2}$

＜解＞

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to +0}\frac{x-2}{x(x-1)}=+\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to -0}\frac{x-2}{x(x-1)}=-\infty$

よって，極限はない．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{(x-2)^2}=\underline{\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{(x-2)^2}=\underline{\lim_{x\to 2-0}\frac{-(x-2)}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2-0}\frac{-1}{x-2}=+\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{(x-2)^2}=+\infty$

第 12 問【関数の極限の計算（２）】

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)$

＜解＞

(1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2-0}{1+1}=1$$

(2) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

よって $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+3t+1}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2+3t+1}-t\right)\left(\sqrt{t^2+3t+1}+t\right)}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{(t^2+3t+1)-t^2}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t+1}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

第 13 問【関数の極限が有限確定値に収束する条件】

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+8}{x-3}=2$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+ax+b\right)=0$

＜解＞

(1) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+8}{x-3}$ とおく．

$x\longrightarrow+\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい．ゆえに　$f(x)=\dfrac{ax+b+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}$

よって，$a>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$a<0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ となるから，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ となるための必要条件は　$a=0$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx+8}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}=b$　　ゆえに　$b=2$

逆に，このとき，与えられた等式は成り立つ．

したがって　　$a=0$，$b=2$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+ax+b$ とおく．

$a\geqq0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ となるから，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ となるための必要条件は

$a<0$

$x\longrightarrow+\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい．ゆえに

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+ax+b\right)\left\{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)\right\}}{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)}$$

$$=\frac{(x^2-1)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)}=\frac{(1-a^2)x^2-2abx-(1+b^2)}{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)}$$

$$=\frac{(1-a^2)x-2ab-\dfrac{1+b^2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ となるための条件は

$1-a^2=0$ …… ①，$-2ab=0$ …… ②

$a<0$ であるから，① より　$a=-1$　　ゆえに，② から　$b=0$

逆に，このとき　$f(x)=\sqrt{x^2-1}-x=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$　　したがって　$a=-1$，$b=0$

第 14 問【三角関数の極限】

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 2x}$

＜解＞

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{x}\right)=1\cdot\frac{2}{1}-1=1$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$$

第１５問【指数・対数関数の極限】

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}$

＜解＞

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x\log a}=\frac{1}{\log a}\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{\log a}\cdot\log e=\frac{1}{\log a}$$

(2) $$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow +\infty$ のとき　$t\longrightarrow 0$

よって　$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}$$

(3)　$2x=t$ とおくと，$x \longrightarrow 0$ のとき　$t \longrightarrow 0$

よって　　$\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=e^2$

(4)　$\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}\times 2,\quad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$　より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}=1\times 2=2$$

第 16 問【関数がすべての実数において連続となる条件】

$\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ とする．関数 $f(x)$ がすべての実数 x で連続となるように，定数 a，b の値を定めよ．

＜解＞

$-1<x<1$ のとき　　$\displaystyle f(x)=\frac{0+ax^2+bx}{0+1}=ax^2+bx$

$x<-1$，$1<x$ のとき　　$\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$

$x=1$ のとき　　$\displaystyle f(x)=\frac{1+a+b}{2}$

$x=-1$ のとき　　$\displaystyle f(x)=\frac{-1+a-b}{2}$

また　$\displaystyle \lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(ax^2+bx)=a+b,\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1,$

$\displaystyle \lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x}=-1,\quad \lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}(ax^2+bx)=a-b$

よって，$f(x)$ が $x=\pm 1$ においても連続であるための必要十分条件は

$$a+b=1=\frac{1+a+b}{2}\quad \cdots\cdots ①,\qquad a-b=-1=\frac{-1+a-b}{2}\quad \cdots\cdots ②$$

がともに成り立つことである．①，② から　　$a=0$，$b=1$