微分法(数Ⅲ)

重要例題集　微分法（数III）

第 1 問【微分計算１】

次の関数を微分せよ.

(1)　$y=(2x-3)(x-2)$　　(2)　$y=(2x^2-1)(x^2-3x+1)$

(3)　$y=(x^2+x-3)^2$　　(4)　$y=(x+2)(x-1)(x-5)$

＜解＞

(1)　$y'=(2x-3)'(x-2)+(2x-3)(x-2)'=2(x-2)+(2x-3)\cdot 1=4x-7$

(2)　$y'=(2x^2-1)'(x^2-3x+1)+(2x^2-1)(x^2-3x+1)'$

$=4x(x^2-3x+1)+(2x^2-1)(2x-3)=8x^3-18x^2+2x+3$

(3)　$y'=2(x^2+x-3)(x^2+x-3)'=2(x^2+x-3)(2x+1)=4x^3+6x^2-10x-6$

(4)　$y'=(x+2)'(x-1)(x-5)+(x+2)(x-1)'(x-5)+(x+2)(x-1)(x-5)'$

$=(x-1)(x-5)+(x+2)(x-5)+(x+2)(x-1)=3x^2-8x-7$

第 2 問【微分計算２】

次の関数を微分せよ.

(1)　$y=(x-1)^2$　　(2)　$y=(3x-1)^3$　　(3)　$y=(2x-1)(x-2)^2$

(4)　$y=(x^2+2x+3)^2$　　(5)　$y=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$

＜解＞

(1)　$y'=2(x-1)(x-1)'=2(x-1)$

(2)　$y'=3(3x-1)^2(3x-1)'=3(3x-1)^2\cdot 3=9(3x-1)^2$

(3)　$y'=(2x-1)'(x-2)^2+(2x-1)\cdot 2(x-2)(x-2)'$

$=2(x-2)^2+(2x-1)\cdot 2(x-2)=2(x-2)\{(x-2)+(2x-1)\}$

$=2(x-2)(3x-3)=6(x-2)(x-1)$

(4)　$y'=2(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)'=2(x^2+2x+3)(2x+2)=4(x+1)(x^2+2x+3)$

(5)　$y=(2x+3)^{-2}$ から　　$y'=-2(2x+3)^{-3}(2x+3)'=\dfrac{-2}{(2x+3)^3}\cdot 2=-\dfrac{4}{(2x+3)^3}$

第３問【微分計算３】

次の関数を微分せよ.

(1)　$y=\dfrac{1}{x+1}$　　(2)　$y=\dfrac{2x}{x+3}$　　(3)　$y=\dfrac{1}{x^2-1}$

(4)　$y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$　　(5)　$y=\dfrac{x}{x^2-x+1}$　　(6)　$y=\dfrac{x^3-4x+1}{x-2}$

＜解＞

(1)　$y'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　$y'=\dfrac{(2x)'(x+3)-2x(x+3)'}{(x+3)^2}=\dfrac{2\cdot(x+3)-2x\cdot1}{(x+3)^2}=\dfrac{6}{(x+3)^2}$

(3)　$y'=-\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(4)　$y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

(5)　$y'=\dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

(6)　$y'=\dfrac{(x^3-4x+1)'(x-2)-(x^3-4x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{(3x^2-4)(x-2)-(x^3-4x+1)\cdot1}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$

第４問【微分計算４】

次の関数を微分せよ.

(1)　$y=2x-\cos x$　　(2)　$y=\sin x-\tan x$　　(3)　$y=\cos(2x-1)$

(4)　$y=\tan 3x$　　(5)　$y=\cos(\sin x)$　　(6)　$y=\sin x^2$

(7)　$y=\tan x^2$　　(8)　$y=\cos^3 x$　　(9)　$y=\tan^3 x$

(10)　$y=x\sin 2x$　　(11)　$y=\sin x\cos x$　　(12)　$y=\sin 3x\cos 5x$

<解>

(1) $y'=2-(-\sin x)=2+\sin x$

(2) $y'=\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(3) $y'=-\sin(2x-1)\cdot(2x-1)'=-2\sin(2x-1)$

(4) $y'=\dfrac{(3x)'}{\cos^2 3x}=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

(5) $y'=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$

(6) $y'=\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$

(7) $y'=\dfrac{(x^2)'}{\cos^2 x^2}=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

(8) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$

(9) $y'=3\tan^2 x\cdot(\tan x)'=3\tan^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

(10) $y'=1\cdot\sin 2x+x\cdot 2\cos 2x=\sin 2x+2x\cos 2x$

(11) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$\boxed{\text{別解}}$ $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ 　よって　$y'=\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$

(12) $y'=\cos 3x\cdot(3x)'\cdot\cos 5x+\sin 3x\cdot(-\sin 5x)\cdot(5x)'$

$=3\cos 3x\cos 5x-5\sin 3x\sin 5x$

第 5 問【微分計算 5】

次の関数を微分せよ．ただし，a は定数で，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする．

(1) $y=\log(x^2+2)$　(2) $y=\log\dfrac{2x-1}{2x+1}$　(3) $y=\log|x^2-4|$

(4) $y=\log(\sin x)$　(5) $y=(\log x)^2$　(6) $y=x^2\log x-x$

(7) $y=e^{2x}$　(8) $y=xe^{-2x}$　(9) $y=x^2e^x$

(10) $y=e^x\cos x$　(11) $y=e^x\tan x$　(12) $y=e^{x^2}$

(13) $y=\log_4 2x$　(14) $y=\log_a(x^2-1)$　(15) $y=a^{-3x}$

＜解＞

(1) $y'=\dfrac{(x^2+2)'}{x^2+2}=\dfrac{2x}{x^2+2}$

(2) $y=\log|2x-1|-\log|2x+1|$

よって $y'=\dfrac{(2x-1)'}{2x-1}-\dfrac{(2x+1)'}{2x+1}=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{2}{2x+1}$

$=\dfrac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{4}{4x^2-1}$

(3) $y'=\dfrac{(x^2-4)'}{x^2-4}=\dfrac{2x}{x^2-4}$

(4) $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

(5) $y'=2\log x\cdot(\log x)'=\dfrac{2\log x}{x}$

(6) $y'=(x^2)'\log x+x^2(\log x)'-1=2x\log x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}-1=x(2\log x+1)-1$

(7) $y'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$

(8) $y'=(x)'e^{-2x}+x(e^{-2x})'=1\cdot e^{-2x}-2xe^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

(9) $y'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=x(2+x)e^x$

(10) $y'=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'=e^x\cos x+e^x\cdot(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

(11) $y'=(e^x)'\tan x+e^x(\tan x)'=e^x\tan x+e^x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=e^x\left(\tan x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

(12) $y'=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2xe^{x^2}$

(13) $y'=\dfrac{(2x)'}{2x\log 4}=\dfrac{2}{2x\log 4}=\dfrac{1}{2x\log 2}$

(14) $y'=\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\log a}=\dfrac{2x}{(x^2-1)\log a}$

(15) $y'=a^{-3x}\log a\cdot(-3x)'=-3a^{-3x}\log a$

第 6 問【媒介変数で表された関数の微分】

次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ.

(1) $x=t+1,\quad y=2t-1$

(2) $x=\sqrt{1-t^2},\quad y=t^2+1$

(3) $x=\sin t,\quad y=\cos 2t+1$

(4) $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t$

＜解＞

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}}$$

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=1,\ \dfrac{dy}{dt}=2$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{1}=2$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}},\ \dfrac{dy}{dt}=2t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=-2\sqrt{1-t^2}$

(3)　$\dfrac{dx}{dt}=\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t=-4\sin t\cos t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4\sin t\cos t}{\cos t}=-4\sin t$

(4)　$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=\sin t$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

第 7 問【陰関数の微分】

次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，y を用いて表してもよい．

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$x^2+y^2=1$

(3)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(4)　$2xy-3=0$

＜解＞

$$\boxed{\frac{dy^n}{dx}=n\cdot y^n\cdot\frac{dy}{dx}}$$

(1)　両辺を x について微分すると　$2y\dfrac{dy}{dx}=8$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$

(2)　両辺を x について微分すると　$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

(3)　両辺を x について微分すると　$\dfrac{2}{9}x-\dfrac{1}{2}y\dfrac{dy}{dx}=0$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{9y}$

(4)　両辺を x について微分すると　$2y+2x\dfrac{dy}{dx}=0$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

第 8 問【接線の方程式】

曲線 $y=e^{x}+2e^{-x}$ 上の点 P における接線の傾きが 1 であるような接線の方程式と点 P の座標を求めよ．

＜解＞

$y'=e^{x}-2e^{-x}$

点 P の座標を $(a,\ e^{a}+2e^{-a})$ とする．

点 P における接線の傾きが 1 であるから　　$e^{a}-2e^{-a}=1$

整理して　$(e^{a})^{2}-e^{a}-2=0$　　すなわち　$(e^{a}+1)(e^{a}-2)=0$

$e^{a}>0$ であるから　　$e^{a}=2$　　ゆえに　　$a=\log 2$

このとき　　$e^{\log 2}+2e^{-\log 2}=2+2\cdot 2^{-1}=3$

よって，点 P の座標は　　$(\log 2,\ 3)$

したがって，接線の方程式は　　$y-3=1\cdot(x-\log 2)$　すなわち　$y=x+3-\log 2$

第 9 問【曲線と曲線が接する条件】

2 つの曲線 $y=ax^{2}$ …… ①，$y=\log x$ …… ② がある．①，② が接するとき，定数 a の値を求めよ．

＜解＞

共有点の x 座標を α とする．

①，② をそれぞれ微分して　　$y'=2ax,\ \ y'=\dfrac{1}{x}$

共有点での y 座標と微分係数が等しいから　　$a\alpha^{2}=\log\alpha$ …… ③，$2a\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ …… ④

④ から　　$a=\dfrac{1}{2\alpha^{2}}$　…… ⑤　　　⑤ を ③ に代入して　　$\dfrac{1}{2}=\log\alpha$

よって　　$\alpha=\sqrt{e}$　　　したがって，⑤ から　　$a=\dfrac{1}{2e}$

第 10 問【媒介変数で表された曲線における接線】

次の媒介変数 t で表された曲線について，与えられた t の値に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(1)　$x=2-t,\ \ y=3+t+t^2$　　$(t=2)$

(2)　$x=\cos 2t,\ \ y=\sin t+1$　　$\left(t=-\dfrac{\pi}{6}\right)$

＜解＞

(1)　$t=2$ のとき　　$x=2-2=0,\ \ y=3+2+2^2=9$

$\dfrac{dx}{dt}=-1,\ \ \dfrac{dy}{dt}=1+2t$ であるから　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+2t}{-1}=-1-2t$

ゆえに，$t=2$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=-5$

よって，接線の方程式は　　$y=-5x+9$

(2)　$t=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき　　$x=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2},\ \ y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\ \ \dfrac{dy}{dt}=\cos t$ であるから　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos t}{2\sin 2t}=-\dfrac{1}{4\sin t}$

ゆえに，$t=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$

よって，接線の方程式は　　$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$　　すなわち　　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$

第 11 問【関数の極値】

次の関数の極値を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$

(2)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

(3)　$y=(x+1)e^x$

(4)　$y=2\sin x+\cos 2x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

＜解＞

(1)　定義域は $x \neq 1$ である．

$y=x-4+\dfrac{2}{x-1}$ であるから

$$y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}$$

$y'=0$ とすると　$x=1\pm\sqrt{2}$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$x=1-\sqrt{2}$ のとき極大値 $-3-2\sqrt{2}$，

$x=1+\sqrt{2}$ のとき極小値 $-3+2\sqrt{2}$

(2)　$x-1>0$ であるから，定義域は　$x>1$

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x-1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$y'=0$ とすると　$x=2$

y の増減表は右のようになる．

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	極小 2	$\nearrow$

よって，$x=2$ のとき極小値 2

(3)　$y'=(x+2)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=-2$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 $-\dfrac{1}{e^2}$	$\nearrow$

よって，$x=-2$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{e^2}$

(4)　$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-2\cdot 2\sin x\cos x$

$=2\cos x(1-2\sin x)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ において $y'=0$ とすると　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	極大 $\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	極小 1	$\nearrow$	極大 $\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	極小 -3	$\nearrow$	1

よって，$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき極大値 $\dfrac{3}{2}$，

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき極小値 1，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき極小値 -3

第 12 問【極値から関数の係数を求める】

関数 $y=x+\dfrac{a}{x-1}$ の極大値が -1 となるように，定数 a の値を定めよ．

＜解＞

$x-1\fallingdotseq 0$ であるから，定義域は　$x\fallingdotseq 1$

$$y'=1-\frac{a}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$$

$a\leqq 0$ のとき　常に $y'>0$ であるから，極値をもたない．

$a>0$ のとき　$y'=0$ とすると　$x=1\pm\sqrt{a}$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$1-\sqrt{a}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	／	↘	極小	↗

したがって，y は $x=1-\sqrt{a}$ で極大値をとる．

よって　$(1-\sqrt{a})+\dfrac{a}{(1-\sqrt{a})-1}=-1$　　これを解いて　$a=1$

第 13 問【グラフの凹凸とその概形】

次の関数の増減と凹凸を調べ，グラフをかけ．

(1)　$y=x+\dfrac{4}{x}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

(3)　$y=x+\cos x\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$　　(4)　$y=2\cos x-\cos^2 x\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5)　$y=\log(x^2+1)$　　(6)　$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$

＜解＞

(1)　定義域は $x \neq 0$ である．

$$y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2},\quad y''=\frac{8}{x^3}$$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 2$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	-4	↘	／	↘	4	↗

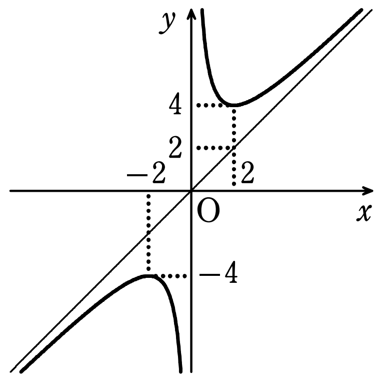
また　$\lim_{x\to -0} y=-\infty$，$\lim_{x\to +0} y=+\infty$

更に　$\lim_{x\to -\infty}(y-x)=0$，$\lim_{x\to +\infty}(y-x)=0$

ゆえに，漸近線は 2 直線 $x=0$，$y=x$

よって，グラフは〔図〕.

(1)



(2)　偶関数であるから，グラフは y 軸に関して対称.

$$y'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2},\quad y''=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

$y''=0$ とすると　　$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる．

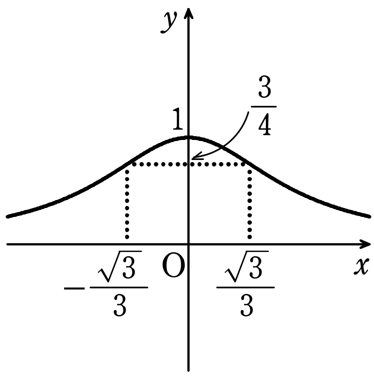
x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘

また，$\lim_{x\to -\infty} y=0$，$\lim_{x\to +\infty} y=0$ であるから

漸近線は直線 $y=0$

よって，グラフは〔図〕.

(2)



(3)　$y'=1-\sin x$，$y''=-\cos x$

$0<x<2\pi$ で，$y'=0$ とすると　$x=\dfrac{\pi}{2}$

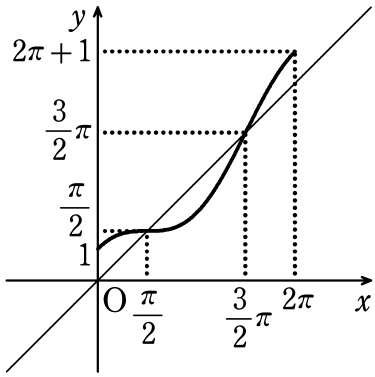
$y''=0$ とすると　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	↗	$\dfrac{\pi}{2}$	↗	$\dfrac{3}{2}\pi$	↗	$2\pi+1$

よって，グラフは〔図〕.

(3)



(4)　$y'=-2\sin x+2\cos x\sin x$

$=2\sin x(\cos x-1)$

$y''=2\cos x(\cos x-1)-2\sin^2 x$

$=4\cos^2 x-2\cos x-2=2(\cos x-1)(2\cos x+1)$

$0<x<2\pi$ で，$y'=0$ とすると　$x=\pi$

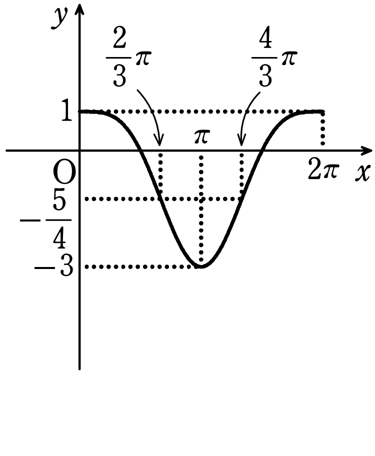
$y''=0$ とすると　$x=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	1	↘	$-\dfrac{5}{4}$	↘	-3	↗	$-\dfrac{5}{4}$	↗	1

よって，グラフは〔図〕.

(4)



(5) 偶関数であるから，グラフは y 軸に関して対称.

$$y'=\frac{2x}{x^2+1},$$

$$y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

$y''=0$ とすると　　$x=\pm 1$

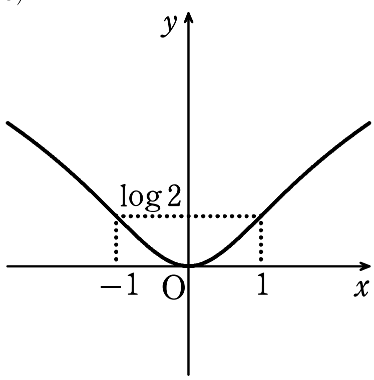
y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	$\log 2$	↘	0	↗	$\log 2$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty$

よって，グラフは〔図〕.

(5)



(6) 偶関数であるから，グラフは y 軸に関して対称.

$$y'=-xe^{-\frac{x^2}{2}},\quad y''=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

$y''=0$ とすると　　$x=\pm 1$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる.

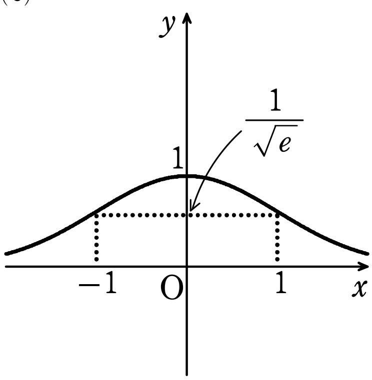
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0,\quad \lim_{x\to+\infty} y=0$ であるから

漸近線は直線 $y=0$

よって，グラフは〔図〕.

(6)



第 14 問【不等式の証明】

次のことが成り立つことを証明せよ.

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$\theta<\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}$

(2)　$x>0$ のとき　　$\log(1+x)<\dfrac{1+x}{2}$

＜解＞

(1)　$f(\theta)=\sin\theta+\tan\theta-2\theta$ とおく.

$$f'(\theta)=\cos\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}-2=\frac{1-2\cos^2\theta+\cos^3\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)\{1+\cos\theta(1-\cos\theta)\}}{\cos^2\theta}$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta)>0$ であるから，$f(\theta)$ は単調に増加する.

$f(0)=0$ であるから，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$f(\theta)>f(0)=0$　　　よって　　$\theta<\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}$

(2)　$f(x)=\dfrac{1+x}{2}-\log(1+x)$ とおく.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

$f(x)$ $(x>0)$ の増減表は右のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$1-\log 2$	↗

$1-\log 2>0$ であるから，$x>0$ のとき

$f(x)\geqq f(1)>0$

よって　　$\log(1+x)<\dfrac{1+x}{2}$

第 15 問【方程式の実数解の個数】

> a は定数とする．方程式 $x\log x = a$ の異なる実数解の個数を調べよ．

＜解＞

$y = x\log x$ とおく．
この関数の定義域は $x > 0$ である．

$$y' = \log x + 1$$

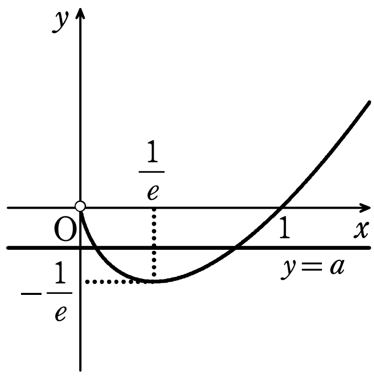
$y' = 0$ とすると　$x = -\dfrac{1}{e}$

y の増減表は右のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
y'	/	$-$	0	$+$
y	/	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

よって，$y = x\log x$ のグラフは図のようになる．
方程式の実数解の個数は，$y = x\log x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に一致するから，求める実数解の個数は



$a < -\dfrac{1}{e}$ のとき　　0 個

$a = -\dfrac{1}{e}$，$0 \leqq a$ のとき　1 個

$-\dfrac{1}{e} < a < 0$ のとき　　2 個

第 16 問【平均値の定理の応用】

平均値の定理を利用して，次のことが成り立つことを証明せよ．

(1) $\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

(2) $|\sin\alpha-\sin\beta|\leqq|\alpha-\beta|$

＜解＞

(1) 関数 $f(x)=x\log x$ は $x>0$ で微分可能で　　$f'(x)=\log x+1$

区間 $a\leqq x\leqq b$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

すなわち
$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=\log c+1,\quad \log a<\log c<\log b$$

を満たす c が存在する．

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ から　　$-2<\log a<\log b<0$

よって　　$-1<\log c+1<1$

ゆえに，$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$ であるから

$$a-b<b\log b-a\log a<b-a$$

(2) [1] $\alpha=\beta$ のとき

$\sin\alpha-\sin\beta=0$，$\alpha-\beta=0$ であるから

$$\sin\alpha-\sin\beta=\alpha-\beta$$

[2] $\alpha\fallingdotseq\beta$ のとき

関数 $f(x)=\sin x$ は微分可能で　　$f'(x)=\cos x$

平均値の定理により

$$\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=|f'(\theta)|,\quad \alpha<\theta<\beta \text{ または } \beta<\theta<\alpha$$

すなわち
$$\left|\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}\right|=|\cos\theta|,\quad \alpha<\theta<\beta \text{ または } \beta<\theta<\alpha$$

を満たす θ が存在する．

ここで，$|\cos\theta|\leqq1$ であるから

$$\left|\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}\right|\leqq1\qquad \text{よって}\qquad |\sin\alpha-\sin\beta|\leqq|\alpha-\beta|$$

第 17 問【極限値と微分係数】

次の極限値を求めよ．ただし，$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{(x+h)^2-x^2}$

＜解＞

(1) $f(x)=a^x$ とおくと　　$f'(x)=a^x\log a$

$$\underline{\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)}=\log a$$

(2) $f(x)=\sin x$ とおくと　　$f'(x)=\cos x$

$$\underline{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{(x+h)^2-x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h(2x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{2x+h}}$$

$$=f'(x)\cdot\frac{1}{2x}=\frac{\cos x}{2x}$$