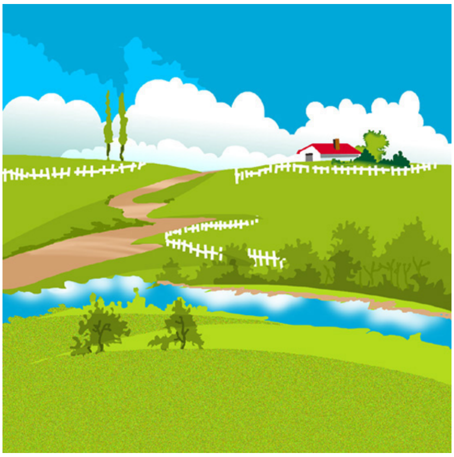
# 積分の応用(数Ⅲ)



# 重要例題集　積分の応用（数III）

第 1 問【$x$ 軸との囲む面積】

次の曲線と $x$ 軸に挟まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$　$(1\leqq x\leqq e)$　　(2)　$y=\sqrt[3]{x}$　$(1\leqq x\leqq 2)$　　(3)　$y=\cos x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$

(4)　$y=\log(x-1)$　$(2\leqq x\leqq e+1)$　　(5)　$y=e^{x}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

＜解＞

求める面積を $S$ とする．

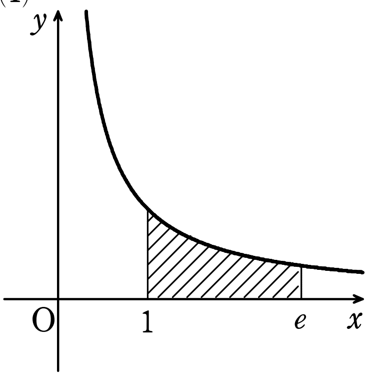
(1)　$1\leqq x\leqq e$ のとき　$y\geqq 0$

$$S=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_1^e=1$$

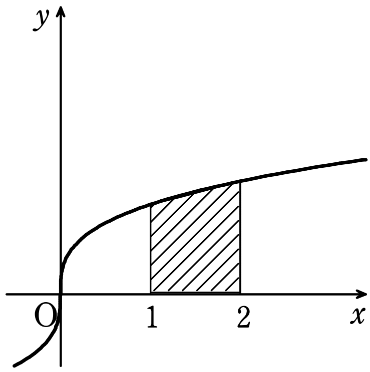
(2)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$y\geqq 0$

$$S=\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^2=\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$$

(1)




(2)

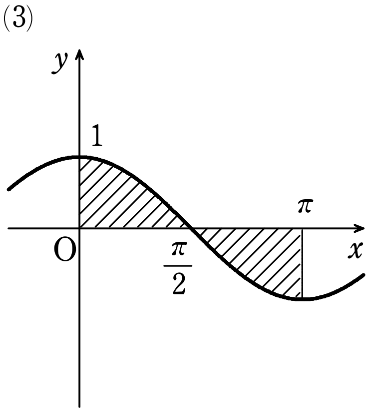


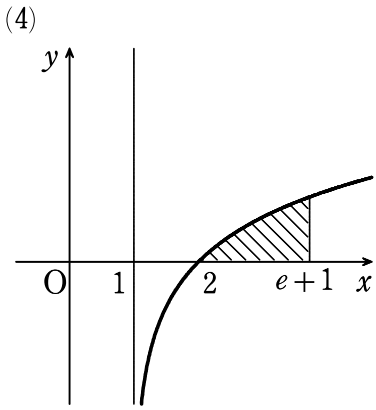
(3)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき　$y \geqq 0$,　　$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき　$y \leqq 0$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$$

(4)　$2 \leqq x \leqq e+1$ のとき　$y \geqq 0$

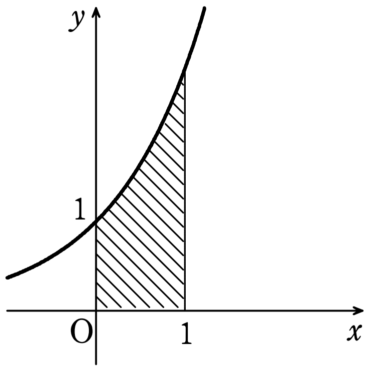
$$S=\int_2^{e+1} \log(x-1)\,dx=\Big[(x-1)\log(x-1)-(x-1)\Big]_2^{e+1}=e-e-(-1)=1$$




(5)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　　$y \geqq 0$

$$S=\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$$




第 2 問 **【$y$ 軸との囲む面積】**

次の曲線と $y$ 軸に挟まれる部分の面積を求めよ.

(1)　$y^2=x$　$(1 \leqq y \leqq 4)$　　　　(2)　$y=e^x$　$(1 \leqq y \leqq e)$

＜解＞

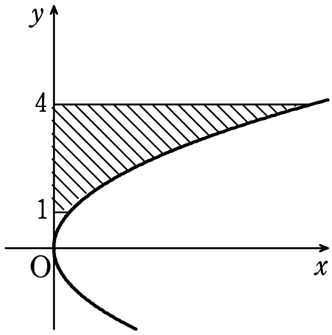
求める面積を $S$ とする．

(1)　$1 \leqq y \leqq 4$ のとき　　$x \geqq 0$

$$\boxed{S=\int_1^4 y^2 dy}$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}(64-1)=21$$




(2)　$y=e^x$ から　　$x=\log y$

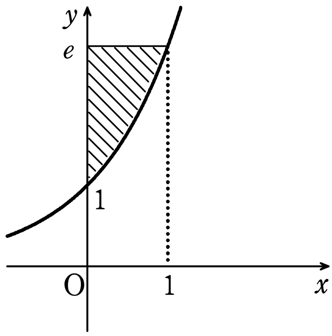
$1 \leqq y \leqq e$ のとき　　$x \geqq 0$

$$\boxed{S=\int_1^e \log y\, dy}$$

$$=\Big[y\log y-y\Big]_1^e$$

$$=e-e-(-1)=1$$

別解　$S=\displaystyle\int_0^1 (e-e^x)dx=\Big[ex-e^x\Big]_0^1=1$




第 3 問【2 グラフの囲む面積】

次の曲線または直線で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$y=\sqrt{x}$，$y=x$　　　　(2)　$y^2=4x$，$x^2=4y$

(3)　$y=\cos x$，$y=\sin x$　$\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$

＜解＞

求める面積を $S$ とする．

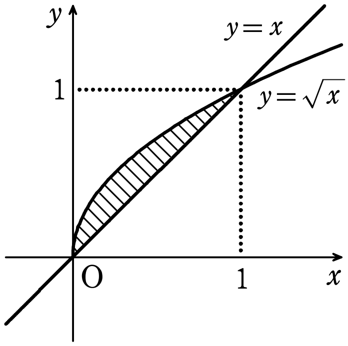
(1)　$\sqrt{x}=x$ とすると　　$x=x^2$

ゆえに　$x(x-1)=0$　　よって　$x=0$，$1$

ゆえに，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ は，2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ で交わり，$0 \leqq x \leqq 1$ では　$\sqrt{x} \geqq x$

よって　$\boxed{S=\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x}-x)dx}$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$



(2)　$y^2=4x$，$x^2=4y$ から $y$ を消去すると　$\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2=4x$

よって　$x^4=64x$　すなわち　$x(x^3-64)=0$

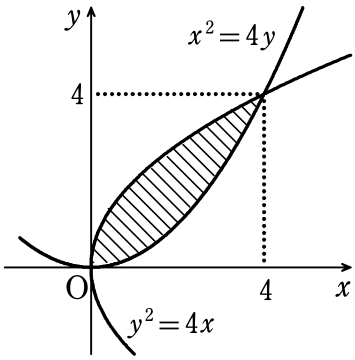
ゆえに　$x=0,\ 4$

よって，2 曲線は，2 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 4)$ で交わり，

$0\leqq x\leqq 4$ では　$2\sqrt{x}\geqq\dfrac{x^2}{4}$

よって　$\boxed{S=\displaystyle\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx}$

$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$




(3)　$\cos x=\sin x$ とすると　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

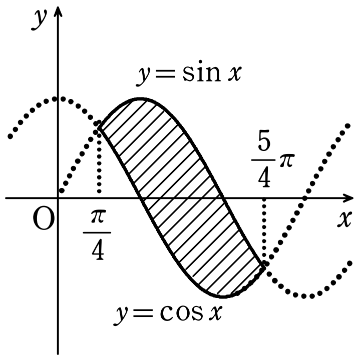
$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ から　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

よって，2 曲線は，2 点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{5}{4}\pi,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

で交わり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ では　$\sin x\geqq\cos x$

ゆえに　$\boxed{S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx}$

$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$$




第 4 問【色々な曲線と面積１】

次の曲線で囲まれる部分の面積を求めよ.

(1)　$2x^2+3y^2=6$　　　　(2)　$3x^2+4y^2=1$

＜解＞

(1)　$2x^2+3y^2=6$ から　　$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

この曲線は楕円で，$x$ 軸および $y$ 軸に関して対称である．よって，求める面積 $S$ は第1象限にある部分の面積の4倍である．

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ での曲線の方程式は　　$y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3-x^2}$

また，$3-x^2 \geqq 0$ であるから　　$0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$

よって　　$S=4\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3-x^2}\,dx=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すから

$$S=\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{3})^2=\sqrt{6}\,\pi$$

(2)　この曲線は楕円で，$x$ 軸および $y$ 軸に関して対称である．よって，求める面積 $S$ は第1象限にある部分の面積の4倍である．

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ での曲線の方程式は　　$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-3x^2}$

また，$1-3x^2 \geqq 0$ であるから　　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$S=4\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \dfrac{1}{2}\sqrt{1-3x^2}\,dx=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\dfrac{1}{3}-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\dfrac{1}{3}-x^2}\,dx$ は，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すから

$$S=2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

第5問【色々な曲線と面積2】

次の曲線と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$x=t^2$，$y=2t-t^2$　$(0 \leqq t \leqq 2)$　　　(2)　$x=\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

＜解＞

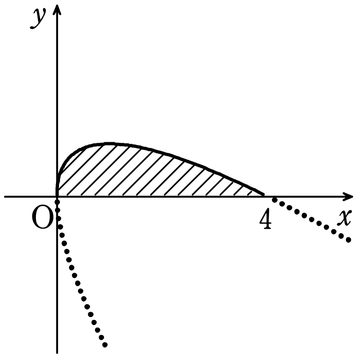
求める面積を $S$ とする．

(1)　$x=t^2$ から　　$dx=2tdt$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | $\cdots$ | 2 |

$$\boxed{S=\int_0^4|y|dx=\int_0^2(2t-t^2)\cdot 2tdt}$$

$$=\int_0^2(4t^2-2t^3)dt=\left[\frac{4}{3}t^3-\frac{t^4}{2}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$



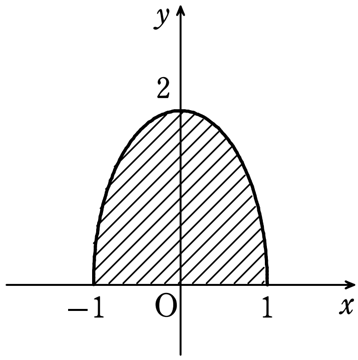

(2)　$x=\cos\theta$ から　　$dx=-\sin\theta\,d\theta$

| $x$ | 1 | $\cdots$ | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\pi$ |

$$\boxed{S=\int_{-1}^1|y|dx=\int_\pi^0 2\sin\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta}$$

$$=2\int_0^\pi\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^\pi(1-\cos 2\theta)d\theta$$

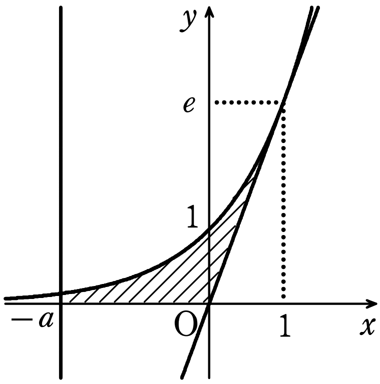
$$=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi=\pi$$




第 6 問【接線と面積】

曲線 $y=e^x$ と，原点からこの曲線に引いた接線，直線 $x=-a\ (a>0)$ および $x$ 軸の 4 つの曲線で囲まれる部分の面積を求めよ．

＜解＞




$y=e^x$ から　$y'=e^x$

接点の座標を $(t,\ e^t)$ とすると，接線の方程式は

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

これが原点を通るから

$-e^t=-te^t$　　　　よって　$t=1$

ゆえに，接線の方程式は　$y=ex$

$-a\leqq x\leqq 0$ で　$0\leqq e^x$，$0\leqq x\leqq 1$ で　$ex\leqq e^x$

よって，求める面積 $S$ は

$$S=\int_{-a}^{1}e^x dx-\int_0^1 exdx=\Big[e^x\Big]_{-a}^{1}-\left[\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-e^{-a}$$

第 7 問【回転体の体積】

次の曲線または直線で囲まれる部分を，[　]内に与えられた直線の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

(1)　$y=x^3-x,\ y=0$　[$x$ 軸]　　(2)　$y=1-\sqrt{x},\ x=0,\ y=0$　[$x$ 軸]

(3)　$y=\cos x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right),\ y=0$　[$x$ 軸]

(4)　$y=e^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0$　[$x$ 軸]

(5)　$y=x^2-2,\ y=0$　[$y$ 軸]　　(6)　$y=\sqrt{4-x},\ x=0,\ y=0$　[$y$ 軸]

＜解＞

求める体積を $V$ とする．

(1)　$x^3-x=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ 1$

$$\boxed{V=\pi\int_{-1}^{0}(x^3-x)^2dx+\pi\int_0^1(x^3-x)^2dx}=2\pi\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)dx$$

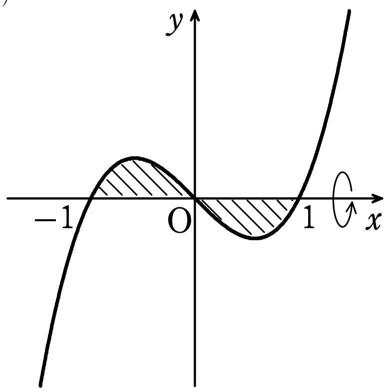
$$=2\pi\left[\frac{x^7}{7}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\pi$$

(2)　$1-\sqrt{x}=0$ とすると　$x=1$

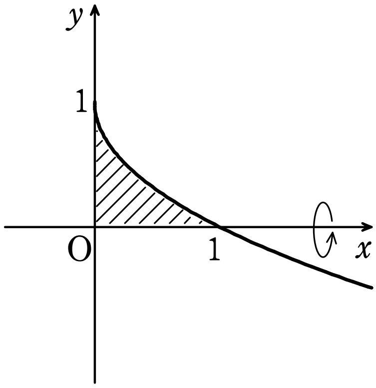
$$\boxed{V=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx}$$

$$=\pi\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

(1)



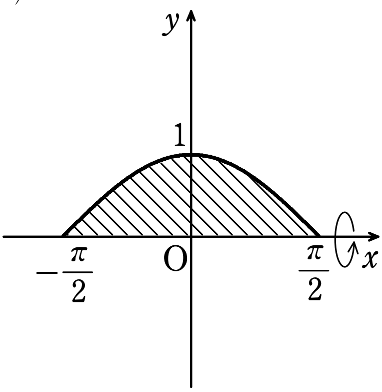

(2)



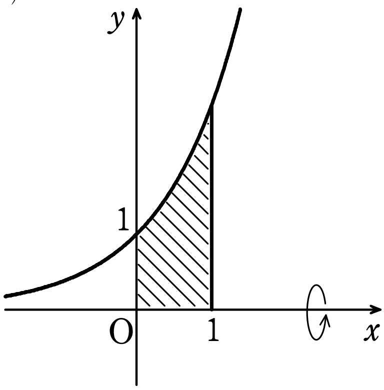

(3) $V=\boxed{\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx}=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\pi\left[x+\dfrac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{2}$

(4) $V=\boxed{\pi\int_0^1 e^{2x}dx}=\pi\left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^1=\dfrac{\pi}{2}(e^2-1)$

(3)




(4)




(5) $y=x^2-2$ から　　$x^2=y+2$　　　　$x=0$ のとき　$y=-2$

よって，図から

$$V=\boxed{\pi\int_{-2}^{0}x^2dy}=\pi\int_{-2}^{0}(y+2)dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^{0}=2\pi$$

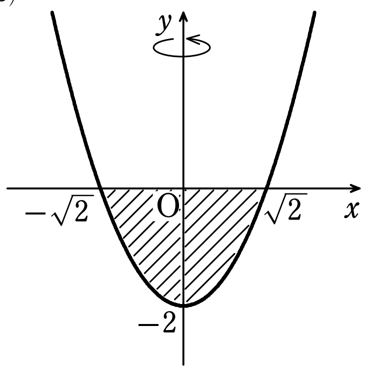
(6) $y=\sqrt{4-x}$ から　　$x=4-y^2$　　　　$x=0$ のとき　$y=2$

よって，図から

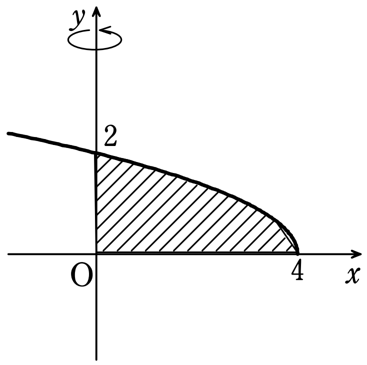
$$V=\boxed{\pi\int_0^2 x^2dy}=\pi\int_0^2(4-y^2)^2dy=\pi\int_0^2(16-8y^2+y^4)dy$$

$$=\pi\left[16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{256}{15}\pi$$

(5)




(6)




第 8 問【2 曲線の囲む図形の回転体の体積〔$x$ 軸周りの回転〕】

次の曲線または直線で囲まれる部分を，$x$ 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

(1)　$y=2-x^2$，$y=x$　　　　(2)　$y=\sin x$，$y=\sin 2x$　$\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi\right)$

＜解＞

求める体積を $V$ とする．

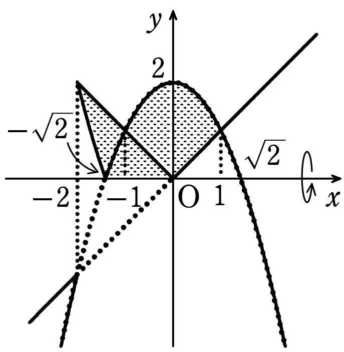
(1)　$2-x^2=x$ を解くと

$$x=1,\ -2$$

$x<0$ の範囲で，$2-x^2=-x$ を解くと

$$x=-1$$

題意の回転体は，図の網目の部分を $x$ 軸の周りに 1 回転すると得られる．よって




$$V=\pi\int_{-2}^{-1}(-x)^2dx-\pi\int_{-2}^{-\sqrt{2}}(x^2-2)^2dx$$
$$+\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx-\pi\int_0^1 x^2dx$$
$$=\pi\int_{-2}^{-1}x^2dx-\pi\int_{-2}^{-\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)dx+2\pi\int_0^1(x^4-4x^2+4)dx-\pi\int_0^1 x^2dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{-\sqrt{2}}+2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\left(4+\frac{32\sqrt{2}}{15}\right)\pi$$

(2) $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $\sin x = \sin 2x$ とすると

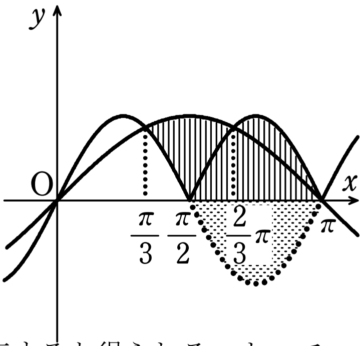
$$\sin x(1-2\cos x)=0$$

よって　　　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，$\sin x = -\sin 2x$ とすると

$$\sin x(1+2\cos x)=0$$

よって　　　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$




題意の回転体は，図の縦線の部分を $x$ 軸の周りに 1 回転すると得られる．よって

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (-\sin 2x)^2 dx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2}dx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8}\pi$$

第 9 問【パラメーター曲線で作る回転体の体積】

曲線 $x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 $V$ を求めよ．

＜解＞

$x=\tan\theta$ から　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $-\dfrac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{4}$ |

$$V=\boxed{\pi\int_{-1}^{1}y^2dx}=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\theta-4+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2\theta-2+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\pi\Big[\sin 2\theta-2\theta+\tan\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi(4-\pi)$$

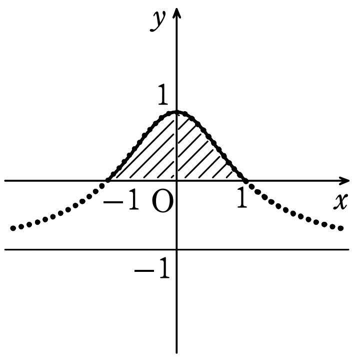
参考　$x=\tan\theta$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+x^2}$$

よって　$y=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$$=2\cdot\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

曲線は図の実線部分のようになる．




第 10 問【x 軸，y 軸周り以外の回転体の体積】

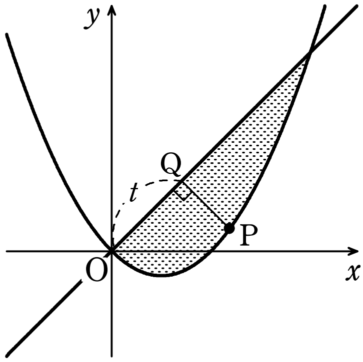
放物線 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ と直線 $y=x$ で囲まれる部分を，この直線の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 $V$ を求めたい．

(1)　放物線上の点 P から直線 $y=x$ に下ろした垂線を PQ とする．OQ$=t$ とおいて，PQ$^2$ を $t$ で表せ．ただし，O は原点とする．

(2)　$V=\pi\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{PQ}^2dt$ として，$V$ の値を求めよ．

＜解＞

放物線と直線の位置関係は，右図のようになる．




(1)　点 Q の座標は　$\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$

直線 PQ は傾きが $-1$ で点 Q を通るから，

その方程式は

$$y=-\left(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+\frac{t}{\sqrt{2}}$$

すなわち　$y=-x+\sqrt{2}\,t$

点 P の $x$ 座標は $-x+\sqrt{2}\,t=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ の解であり，

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{2t}$　　　　よって　　$\mathrm{P}(\sqrt{2t},\ \sqrt{2}\,t-\sqrt{2t})$

点 P と直線 $y=x$ の距離を考えて

$$\mathrm{PQ}^2=\left\{\frac{|\sqrt{2t}-(\sqrt{2}\,t-\sqrt{2t})|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right\}^2=|2\sqrt{t}-t|^2=(t-2\sqrt{t})^2$$

(2)　$\alpha$，$\beta$ は $\mathrm{PQ}^2=0$ の解である．

$(t-2\sqrt{t})^2=0$ から　　$t(\sqrt{t}-2)^2=0$　　　　よって　　$t=0,\ 4$

$$V=\boxed{\pi\int_0^4(t-2\sqrt{t})^2dt}=\pi\int_0^4(t^2-4t\sqrt{t}+4t)dt$$

$$=\pi\left[\frac{t^3}{3}-\frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^2\right]_0^4=\frac{32}{15}\pi$$

第 11 問【非回転体の体積】

座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$，$\mathrm{Q}(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とし，この平面に垂直な正方形を作る．P が原点 O から $\mathrm{C}(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正方形が描く立体の体積を求めよ．

＜解＞

正方形の 1 辺の長さが $\sin x$ であるから，求める体積 $V$ は

$$V=\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

第 12 問【水の問題】

曲線 $y=\log x$ と，$x$ 軸，$y$ 軸および直線 $y=10$ で囲まれる部分を，$y$ 軸の周りに 1 回転させてできる器に，毎秒 $v$ の水を入れる．

(1) 水の深さが $h$ のときの，水の体積を求めよ．

(2) 水の深さが $h$ のときの，水面の上昇速度を求めよ．

＜解＞

$t$ 秒後の水の深さを $h$，体積を $V$ とする．

(1) $y=\log x$ から $x=e^y$

$$\boxed{V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h e^{2y}dy}=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$$

(2) $\underline{V=\frac{\pi}{2}(e^{2h}-1)\text{ の両辺を }t\text{ で微分すると}}$ $\quad \frac{dV}{dt}=\pi e^{2h}\frac{dh}{dt}$

$\underline{\frac{dV}{dt}=v}$ であるから，求める水面の上昇速度は $\quad \frac{dh}{dt}=\frac{v}{\pi e^{2h}}$

第 13 問【微分と積分の関係１】

次の関数を，$x$ について微分せよ．

(1) $y=\int_0^x e^t\cos t\,dt$ (2) $y=\int_1^x (t-x)\log t\,dt$

＜解＞

(1) $y'=\frac{d}{dx}\int_0^x e^t\cos t\,dt=e^x\cos x$

(2) $y'=\frac{d}{dx}\int_1^x (t-x)\log t\,dt=\underline{\frac{d}{dx}\int_1^x t\log t\,dt-\frac{d}{dx}\left(x\int_1^x \log t\,dt\right)}$

$$=x\log x-\int_1^x \log t\,dt-x\log x=-\Big[t\log t-t\Big]_1^x=-x\log x+x-1$$

第 14 問【微分と積分の関係 2】

次の関数を，$x$ について微分せよ．

(1)　$y=\displaystyle\int_x^{2x}\cos^2 t\,dt$　　　(2)　$y=\displaystyle\int_x^{x^2} e^t\sin t\,dt$

＜解＞

(1)　$\cos^2 t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とする．

$$\int_x^{2x}\cos^2 t\,dt=F(2x)-F(x),\quad F'(t)=\cos^2 t$$

$$y'=\boxed{\frac{d}{dx}\int_x^{2x}\cos^2 t\,dt=2F'(2x)-F'(x)}=2\cos^2 2x-\cos^2 x$$

(2)　$e^t\sin t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とする．

$$\int_x^{x^2} e^t\sin t\,dt=F(x^2)-F(x),\quad F'(t)=e^t\sin t$$

$$y'=\boxed{\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^t\sin t\,dt=2xF'(x^2)-F'(x)}=2xe^{x^2}\sin x^2-e^x\sin x$$

第 15 問【積分方程式】

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$$

＜解＞

$\boxed{a=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt \text{ とおくと}\qquad f(x)=\sin x+3a}$

ゆえに　$a=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+3a)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+3a\cos t\right)dt$

$$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t+3a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+3a$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}+3a$ から　$a=-\dfrac{1}{4}$　　　したがって　$f(x)=\sin x-\dfrac{3}{4}$

第 16 問【部分求積法】

定積分を用いて，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{(\sqrt{1}+\sqrt{n})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{n})^2+\cdots\cdots+(\sqrt{n}+\sqrt{n})^2\}$

＜解＞

(1) (与式)$\displaystyle=\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx}=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

(2) (与式)$\displaystyle=\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx}=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(3) (与式)$\displaystyle=\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$

(4) (与式)$\displaystyle=\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+1\right)^2$

$\displaystyle=\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2dx=\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\frac{17}{6}$

第 17 問【定積分と不等式１】

次の (A) が成り立つことを証明し，(A) を用いて (B) を証明せよ．

(A)　$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$\sqrt{1-x}<\sqrt{1-x^3}<1$

(B)　$\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<2-\sqrt{2}$

＜解＞

(A)　$0<x<\dfrac{1}{2}$ であるから　$0<x^3<x$

よって　$-x<-x^3<0$　　ゆえに　$1-x<1-x^3<1$

したがって　$\sqrt{1-x}<\sqrt{1-x^3}<1$

(B)　(A) の結果から，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において　$1<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

よって　$\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\Big[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{2}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<2-\sqrt{2}$

第 18 問【定積分と不等式 2】

$\dfrac{1}{x}$ の定積分を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

＜解＞

$k$ は自然数で，$k \leqq x \leqq k+1$ とすると

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k}$$

等号は常には成り立たないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

すなわち $$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$$

$\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx$ で，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ とおいて，辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx=\int_1^{n} \frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_1^n=\log n$ であるから

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$$

各辺に 1 を加えて

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \quad \cdots\cdots ①$$

$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ で，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ とおいて，辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

同様に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx=\log(n+1)$ であるから

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から与えられた不等式が成り立つ．