場合の数，確率

重要例題集　場合の数，確率

第 1 問【集合と包含関係】

1 から 10 までの自然数の集合を全体集合とし，3 の倍数の集合を A，2 の倍数の集合を B とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{B}$　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(5) $\overline{A\cap B}$　(6) $\overline{A\cup B}$

＜解＞

$A=\{3,\ 6,\ 9\}$　$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(1) $\overline{A}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$

(2) $\overline{B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5,\ 7\}$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(5) $A\cap B=\{6\}$ であるから

$\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

別解　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ であるから，(4) より

$\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(6) $A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$ であるから

$\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7\}$

別解　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ であるから，(3) より　$\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7\}$

第 2 問【集合とベン図】

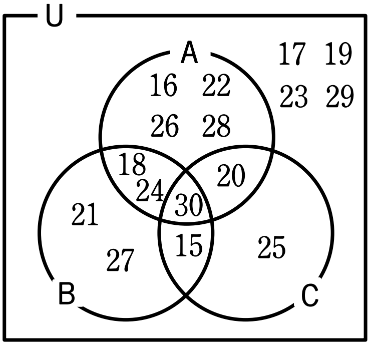
整数全体の集合を Z とするとき，$U=\{n \mid 15\leqq n\leqq 30,\ n\in Z\}$ の 3 つの部分集合 $A=\{2n \mid n\in Z\}$，$B=\{3n \mid n\in Z\}$，$C=\{5n \mid n\in Z\}$ について

(1) U，A，B，C およびそれぞれの要素を 1 つの図にかき表せ．

(2) $A\cap B\cap C$，$A\cup B\cup C$，$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ を求めよ．

＜解＞

(1)　右の図のようになる．



(2)　図から

$A \cap B \cap C = \{30\}$

$A \cup B \cup C$

$= \{15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 21,\ 22,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 30\}$

$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{16,\ 22,\ 26,\ 28\}$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{17,\ 19,\ 23,\ 29\}$

第 3 問【集合の要素の数－ド・モルガンの法則など】

1 から 100 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1)　3 の倍数　　(2)　5 の倍数　　(3)　3 と 5 の公倍数

(4)　3 または 5 で割り切れる数　　(5)　3 で割り切れない数

(6)　15 と互いに素な数

＜解＞

1 から 100 までの整数の集合を全体集合 U，3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とする．　$A = \{3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 3 \cdot 33\}$，　$B = \{5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 5 \cdot 20\}$

(1)　3 の倍数の個数は　　$n(A) = 33$

(2)　5 の倍数の個数は　　$n(B) = 20$

(3)　3 と 5 の公倍数の集合は $A \cap B$ で表される．

$A \cap B = \{15 \cdot 1,\ 15 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 15 \cdot 6\}$

よって　　$n(A \cap B) = 6$

(4)　3 または 5 で割り切れる数の集合は $A \cup B$ で表されるから

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$

(5)　3 で割り切れない数の集合は $\overline{A}$ で表される．

よって　　$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$

(6)　15 と互いに素な数は，3 でも 5 でも割り切れない数であるから，その集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ で表される．

よって　　$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 47 = 53$

第 4 問【集合の要素の個数－ベン図を使って考える】

集合 A，B について，$n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})=10$，$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=7$ であるとき，
$n(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})+n(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})$ の値を求めよ．

＜解＞

$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ から

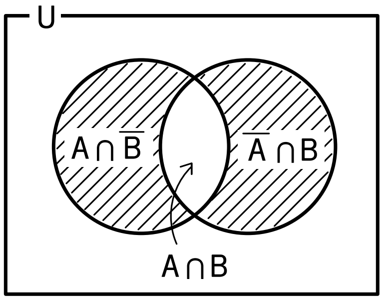
$7=10-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

よって　$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=3$

$\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ と $\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$ は，図の斜線部分で表されるから

$n(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})+n(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$=7-3=4$



第 5 問【正の約数の個数，約数の総和】

次の自然数の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ．

(1)　$5\cdot2^3$　　(2)　108　　(3)　360

＜解＞

(1)　$5\cdot2^3$ の約数は，5 の約数と 2^3 の約数の積である．

5 の約数は，1，5 の 2 通り

2^3 の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 通り

よって，$5\cdot2^3$ の約数の個数は　$2\times4=8$（個）

また，$5\cdot2^3$ の約数の総和は　$(1+5)(1+2+2^2+2^3)=90$

(2)　108 を素因数分解すると　$108=2^2\cdot3^3$

2^2 の約数は，1，2，2^2 の 3 通り

3^3 の約数は，1，3，3^2，3^3 の 4 通り

$2^2\cdot3^3$ の約数は，2^2 の約数と 3^3 の約数の積である．

よって，108 の約数の個数は　$3\times4=12$（個）

また，108 の約数の総和は　$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=280$

(3)　360 を素因数分解すると　　$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

2^3 の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 通り

3^2 の約数は，1，3，3^2 の 3 通り

5 の約数は，1，5 の 2 通り

$2^3\cdot 3^2\cdot 5$ の約数は，2^3 の約数と 3^2 の約数と 5 の約数の積である．

よって　360 の約数の個数は　　$4\times 3\times 2=24$（個）

また，360 の約数の総和は　　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=1170$

第 6 問【積の法則，和の法則，補集合】

大中小 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合は何通りあるか．

(1)　3 個の目がすべて異なる場合　　(2)　少なくとも 2 個が同じ目になる場合

(3)　目の積が 3 の倍数になる場合　　(4)　目の和が奇数になる場合

＜解＞

(1)　$6\times 5\times 4=120$（通り）

(2)　大中小 3 個のさいころの目の出方は　　$6\times 6\times 6=216$（通り）

このうち，3 個の目がすべて異なる場合は，(1) により 120 通りある．

よって，少なくとも 2 個が同じ目になる場合は

$216-120=96$（通り）

(3)　目の積が 3 の倍数になるのは，少なくとも 1 個が 3 の倍数になる場合である．

3 個の目がすべて 3 の倍数でない場合は　　$4^3=64$（通り）

よって，目の積が 3 の倍数になる場合は　　$216-64=152$（通り）

(4)　目の和が奇数になるのは，3 個とも奇数の場合か，2 個が偶数で 1 個が奇数の場合である．よって，求める場合の数は

$3^3+3^3\times 3=108$（通り）

第 7 問【順列】

5 個の数字 0，1，2，3，4 の中の異なる数字を用いてできる 3 桁の整数のうち，次のようなものは何個あるか.

(1)　偶数　　　　　　　　　　　　　　(2)　3 の倍数

＜解＞

(1)　一の位に使えるのは，0，2，4 である.

[1]　一の位が 0 のとき

残りの位には 1 ～ 4 のうちから 2 個を選んで並べるから，その個数は

$${}_4P_2=4\cdot3=12 \text{（個）}$$

[2]　一の位が 2 か 4 のとき

百の位は一の位の数字と 0 を除く 3 つから選び，そのおのおのに対して十の位には残りの 3 つから 1 つを選ぶ.

よって　$(3\times3)\times2=18$（個）

[1]，[2] から，求める個数は　$12+18=30$（個）

(2)　3 の倍数になるのは，各位の数字の和が 3 の倍数になるときである.

よって，3 の倍数になる 3 個の数字の組は

(0，1，2)，(0，2，4)，(1，2，3)，(2，3，4)

[1]　(0，1，2)，(0，2，4) のとき

百の位は 0 でないから　$(2\times{}_2P_2)\times2=8$（個）

[2]　(1，2，3)，(2，3，4) のとき

$${}_3P_3\times2=3\cdot2\cdot1\times2=12 \text{（個）}$$

[1]，[2] から，求める個数は　$8+12=20$（個）

第 8 問【順列－隣り合う・隣り合わない】

女子 5 人，男子 3 人が 1 列に並ぶとき，次の並び方は何通りあるか.

(1)　女子 5 人が皆隣り合う

(2)　女子は女子，男子は男子で，それぞれ皆隣り合う

(3)　どの男子も隣り合わない

＜解＞

(1)　女子 5 人を 1 組と考え，この 1 組と男子 3 人の並び方は　${}_4P_4$ 通り

そのおのおのに対して，女子 5 人の並び方は　${}_5P_5$ 通り

よって，求める並び方の総数は

$${}_4P_4 \times {}_5P_5 = 24 \times 120 = 2880 \text{（通り）}$$

(2)　女子 5 人を1 組，男子 3 人を 1 組と考え，この 2 組の並び方は　${}_2P_2$ 通り

そのおのおのに対して，女子 5 人の並び方および男子 3 人の並び方は，それぞれ

${}_5P_5$ 通り，　${}_3P_3$ 通り

よって，求める並び方の総数は

$${}_2P_2 \times {}_5P_5 \times {}_3P_3 = 2 \times 120 \times 6 = 1440 \text{（通り）}$$

(3)　どの男子も隣り合わないようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間か両端の 6 か所に男子 3 人を並べればよい．

まず，女子 5 人の並び方は　${}_5P_5$ 通り

そのおのおのに対して，女子と女子の間か両端の 6 か所に男子 3 人を並べる方法は

${}_6P_3$ 通り

よって，求める並び方の総数は

$${}_5P_5 \times {}_6P_3 = 120 \times 120 = 14400 \text{（通り）}$$

第 9 問【辞書式順列】

A，B，C，D，E の 5 文字をすべて用いてできる順列を辞書式に配列するとき，次の問いに答えよ．ABCDE が 1 番目である．

(1)　15 番目の文字列を求めよ．　(2)　CBEAD は何番目の文字列か．

＜解＞

(1)　AB ○○○，AC ○○○ の形の文字列は，それぞれ $3!=6$ 個ずつ，あわせて 12 個あるから，15 番目の文字列は AD ○○○ の形の文字列の 3 番目である．順に書き並べてみると　ADBCE，ADBEC，ADCBE，……

よって，15 番目の文字列は　ADCBE

(2)　A ○○○○ の形の文字列は　4! 個，　B ○○○○ の形の文字列は　4! 個，

CA ○○○ の形の文字列は　3! 個，　CBA ○○ の形の文字列は　2! 個，

CBD ○○ の形の文字列は　2! 個

よって，CBEADは　$4!+4!+3!+2!+2!+1=59$（番目）

第 10 問【円順列】

> (1) 円卓のまわりに 8 人が座る方法は何通りあるか.
> (2) 色の異なる 6 個の玉を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか．また，これら 6 個の玉から 4 個を取って円形に並べる方法は何通りあるか.

＜解＞

(1) $(8-1)!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$（通り）

(2) 6 個の玉を円形に並べる方法は

$$(6-1)!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120 \text{（通り）}$$

6 個の玉から 4 個を取って円形に並べる方法は

$$\frac{{}_6P_4}{4}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4}=90 \text{（通り）}$$

第 11 問【組合せ】

> 男子 6 人，女子 4 人の中から 4 人の委員を選ぶとき
> (1) 全部で何通りの方法があるか.
> (2) 男子の委員 2 人，女子の委員 2 人を選ぶ方法は何通りあるか.
> (3) 特定の 2 人 a，b がともに選ばれる方法は何通りあるか.

＜解＞

(1) 男女合わせた 10 人から 4 人を選ぶから

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210 \text{（通り）}$$

(2) 男子 6 人から委員 2 人を選ぶ方法は${}_6C_2$ 通り，女子 4 人から委員 2 人を選ぶ方法は ${}_4C_2$ 通り．よって，求める委員の選び方は

$${}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=90 \text{（通り）}$$

(3) a，b の 2 人を先に選んでおき，残りの 8 人から 2 人を選ぶと考えて

$${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28 \text{（通り）}$$

第 12 問【同じものを含む順列】

(1)　a，a，a，b，b，c，d の 7 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか.
(2)　KUMAMOTO の 8 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか.

＜解＞

(1)　a が 3 個，b が 2 個，c が 1 個，d が 1 個あるから，この 7 文字の並べ方は

$$\frac{7!}{3!2!}=420 \text{（通り）}$$

(2)　M が 2 個，O が 2 個，K，U，A，T が 1 個ずつあるから，この 8 文字の並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!}=10080 \text{（通り）}$$

別解　(1)　${}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2P_2=420$（通り）

(2)　${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4P_4=10080$（通り）

第 13 問【同じものを含む円順列】

白玉 1 個，赤玉 2 個，青玉 4 個がある.
(1)　これらを机の上に円形に並べる方法は何通りあるか.
(2)　これらで何通りの首飾りが作るか.

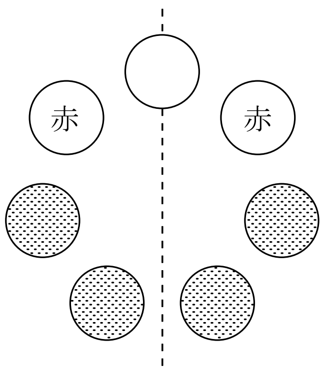
＜解＞

(1)　白玉 1 個を固定すると，残り 6 個の並べ方は同じものを含む順列と同じで

$$\frac{6!}{2!4!}=15 \text{（通り）}$$

(2)　右図のように，白玉を通る直線に関して対称な円順列は，赤玉 2 個の置き方を考えて　3 通り.
また，対称でない円順列の 1 つ 1 つに対して，裏返すと一致するものが他に必ず 1 つずつあるから

$$3+(15-3)\div 2=9 \text{（通り）}$$



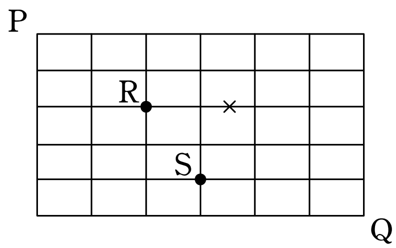
第 14 問【最短経路の数】

右のような街路で，P から Q まで行く最短経路のうち，次のような経路は何通りあるか.

(1)　すべての経路　　(2)　R を通る経路

(3)　R，S をともに通る経路

(4)　×印の箇所は通らない経路



＜解＞

(1)　右に 1 区画進むことを →，下に 1 区画進むことを ↓ で表すと，P から Q に行く最短経路の総数は，6 個の → と 5 個の ↓ を 1 列に並べる順列の総数に等しい.

よって　$\dfrac{11!}{6!5!}=462$（通り）

(2)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

R から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，R を通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=210$（通り）

(3)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

R から S まで行く最短経路は　$\dfrac{3!}{2!}$ 通り

S から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{3!}$ 通り

よって，R，S をともに通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=72$（通り）

(4)　×印の区画の左端をA，右端を B とする.

P から A まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

B から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{2!3!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=100$（通り）

したがって，×印の箇所を通らない最短経路は

$462-100=362$（通り）

第 15 問【組み分け】

異なる 6 冊の本を次のように分ける方法は何通りあるか．
(1)　3 冊ずつ，2 人の子供 A，B に分ける
(2)　3 冊ずつ，2 つの組に分ける
(3)　3 冊，2 冊，1 冊の 3 組に分ける

＜解＞

(1)　A に与える本を 3 冊を選ぶ方法は　$_6C_3$ 通り
B には残りの 3 冊を与えるから，その方法は　1 通り
よって　$_6C_3 \times 1 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$（通り）

(2)　(1) の分け方で，A と B の区別をなくして
$20 \div 2 = 10$（通り）

(3)　6 冊の本から 3 冊を選ぶ方法は　$_6C_3$ 通り
残りの 3 冊から 2 冊を選ぶ方法は　$_3C_2$ 通り
最後の 1 冊を選ぶ方法は　1 通り
よって　$_6C_3 \times {}_3C_2 \times 1 = 60$（通り）

第 16 問【大小関係の決まっている数の選び方】

3 桁の整数の百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ x，y，z とする．
$x<y<z$ を満たす 3 桁の整数は何個あるか．

＜解＞

$x \fallingdotseq 0$ であるから，1 ～ 9 の 9 個の数字から 3 個を選んで，小さいものから順に x，y，z とすると，条件を満たす 3 桁の整数ができる．
よって　$_9C_3 = 84$（個）

第 17 問【重複順列】

(1) 10 人を A または B の 2 部屋に入れる方法は何通りあるか．ただし，全部の人を 1 つの部屋に入れてもよい．
(2) 10 人を 2 つのグループ A，B に分ける方法は何通りあるか．
(3) 10 人を 2 つのグループに分ける方法は何通りあるか．

＜解＞

(1) 10 人のそれぞれが A，B 2 通りの部屋の選び方があるから

$$2^{10}=1024 \text{（通り）}$$

(2) (1) から A，B のどちらかが 0 人になる場合を除いて

$$1024-2=1022 \text{（通り）}$$

(3) (2) で，A，B の区別をなくして　$1022\div 2=511$（通り）

第 18 問【重複組合せ】

方程式 $x+y+z=7$ の負でない整数解は何個あるか．

＜解＞

この方程式の負でない整数解は，7 個の○と 2 つの仕切りの順列を考え，仕切りで分けられた 3 か所の○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる．
よって，整数解の個数は，7 個の同じものと 2 個の同じものの順列の個数に等しいから　${}_9C_7={}_9C_2=36$（個）

別解　整数解 $x=1$，$y=2$，$z=4$ に，x を 1 個，y を 2 個，z を 4 個とることを対応させると，方程式を満たす負でない整数解の個数は，3 種類の文字 x，y，z から重複を許して 7 個とる組合せの数に等しい．
よって　${}_{(3-1)+7}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$（個）

第 19 問【確率１－余事象を利用して考える】

3 個のさいころを同時に投げるとき，次のような目が出る確率を求めよ．
(1)　少なくとも 2 個の目は等しい　　(2)　3 個の目の積が偶数
(3)　目の積が 100 より小さい

＜解＞

起こりうる場合の総数は　6^3 通り

(1)　少なくとも 2 個の目は等しいという事象は，3 個の目がすべて異なるという事象の余事象である．

よって，求める確率は　$1-\dfrac{6\times5\times4}{6^3}=\dfrac{4}{9}$

(2)　3 個の目の積が偶数になるという事象は，3 個の目の積が奇数 (3 個とも奇数の目が出る) になるという事象の余事象である．

よって，求める確率は　$1-\dfrac{3^3}{6^3}=\dfrac{7}{8}$

(3)　目の積が 100 より小さくなるという事象は，目の積が 100 以上になる事象の余事象である．

目の積が 100 以上になる 3 つの目の組合せは

(3，6，6)，　(4，5，5)，　(4，5，6)，　(4，6，6)，
(5，5，5)，　(5，5，6)，　(5，6，6)，　(6，6，6)

があり，順序も考えると全部で

$$3\times5+3!\times1+1\times2=23\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{23}{6^3}=\dfrac{193}{216}$

第 20 問【確率２－加法定理】

赤玉 5 個，青玉 4 個，白玉 3 個が袋の中に入っている．この袋の中から同時に 4 個取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1)　3 個以上赤玉が出る確率　　(2)　取り出した玉がどの色の玉も含む確率
(3)　取り出した玉の色が 2 色である確率

＜解＞

起こりうる場合の総数は　$_{12}\mathrm{C}_4$ 通り

(1)　3 個以上赤玉が出るという事象は

A：4 個とも赤玉　　B：3 個が赤玉で，1 個が青玉か白玉

の 2 つの場合があり，これらは互いに排反である．

$n(\mathrm{A})={}_5\mathrm{C}_4$，$n(\mathrm{B})={}_5\mathrm{C}_3\times{}_7\mathrm{C}_1$ であるから

$$P(\mathrm{A})=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{99},\qquad P(\mathrm{B})=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{14}{99}$$

よって，求める確率は

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})=\frac{1}{99}+\frac{14}{99}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$$

(2)　取り出した玉がどの色の玉も含むという事象は

C：赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個
D：赤玉 1 個，青玉 2 個，白玉 1 個
E：赤玉 1 個，青玉 1 個，白玉 2 個

の 3 つの場合があり，これらは互いに排反である．

$$n(\mathrm{C})={}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=120$$
$$n(\mathrm{D})={}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=90$$
$$n(\mathrm{E})={}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2=60$$

よって，求める確率は

$$P(\mathrm{C}\cup\mathrm{D}\cup\mathrm{E})=P(\mathrm{C})+P(\mathrm{D})+P(\mathrm{E})=\frac{120}{{}_{12}\mathrm{C}_4}+\frac{90}{{}_{12}\mathrm{C}_4}+\frac{60}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{6}{11}$$

(3)　「取り出した玉の色が 2 色である」という事象は，「取り出した玉がどの色も含むか，すべて同じ色である」という事象の余事象である．

どの色も含む確率は，(2) より　$\dfrac{270}{495}$

すべて同じ色である確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\dfrac{6}{495}$

よって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{270}{495}+\dfrac{6}{495}\right)=\dfrac{219}{495}=\dfrac{73}{165}$

第 21 問【最小値の確率】

4 個のさいころを同時に投げるとき，次のような目が出る確率を求めよ．
(1)　4 個の目の最小値が 4 以上　　　(2)　4 個の目の最小値が 4

＜解＞

起こりうる場合の総数は　6^4 通り
(1)　4 個の目の最小値が 4 以上である場合は，4，5，6 から重複を許して 4 個とり出す順列を考えて　3^4 通り
よって，求める確率は　$\dfrac{3^4}{6^4}=\dfrac{1}{16}$
(2)　事象 A，B，C を
A：最小値が 4 以上である　　B：最小値が 4 である
C：最小値が 5 以上である
とすると，A＝B∪C である．
最小値が 5 以上である場合は，5，6 から重複を許して 4 個とり出す順列を考えて
2^4 通り
また，B と C は互いに排反であるから
$$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})$$
よって，求める確率は
$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A})-P(\mathrm{C})=\frac{3^4}{6^4}-\frac{2^4}{6^4}=\frac{65}{1296}$$

第 22 問【くじ引きの確率】

10 本のくじの中に当たりくじが 3 本ある．引いたくじをもとに戻さないで，a，b，c，d 4 人がこの順に 1 本ずつ引くとき，a，b，c，d それぞれの当たる確率を求めよ．

＜解＞

起こりうる場合の総数は，10 個のものから 4 個とる順列の個数に等しいから

$$_{10}P_4 = 10\times9\times8\times7$$

[1]　a が当たる場合の総数は，1 番目に 3 本の当たりくじのうち 1 本を置き，2 番目，3 番目，4 番目にはそれ以外の 9 本から 3 本を選んで並べた順列の個数に等しいから

$$3\times{}_9P_3 = 3\times9\times8\times7$$

よって，a が当たる確率は　$\dfrac{3\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{3}{10}$

[2]　b が当たる場合の総数は，2 番目に 3 本の当たりくじのうち 1 本を置き，1 番目，3 番目，4 番目にはそれ以外の 9 本から 3 本を選んで並べた順列の個数に等しいから

$$3\times{}_9P_3 = 3\times9\times8\times7$$

よって，b が当たる確率は　$\dfrac{3\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{3}{10}$

c，d が当たる確率も，[1]，[2] と同様に考えて　$\dfrac{3}{10}$

第 23 問【反復試行の確率】

白玉 3 個，赤玉 6 個が入っている袋から，玉を 1 個取り出してもとに戻すことを 6 回行うとき，次の確率を求めよ．

(1)　2 回だけ白玉が出る確率　　(2)　6 回目に 2 個目の白玉が出る確率

(3)　白玉が 5 回以上出る確率

＜解＞

玉を 1 個取り出すとき，それが白玉である確率は $\dfrac{1}{3}$，赤玉である確率は $\dfrac{2}{3}$ である．

(1)　${}_6C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{80}{243}$

(2)　6 回目に 2 個目の白玉が出るのは，5 回目までに白玉が 1 回だけ出て，6 回目に白玉が出る場合である．よって，求める確率は

$${}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}=\frac{80}{729}$$

(3)　白玉が 5 回以上出るのは

A：白玉が 5 回出る　　　　　B：白玉が 6 回出る

の 2 つの場合があり，これらは互いに排反である．

事象 A，B の起こる確率は，それぞれ

$$P(\mathrm{A}) = {}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{12}{3^6},\qquad P(\mathrm{B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{3^6}$$

よって，求める確率は

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = \frac{12}{3^6} + \frac{1}{3^6} = \frac{13}{729}$$

第 24 問【勝者になる確率】

A と B がテニスの試合を行うとき，各ゲームで A，B が勝つ確率は，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ であるとする．3 ゲームを先取した方が試合の勝者になるとするとき，A が勝者になる確率を求めよ．

＜解＞

A が勝者になる場合は，総ゲーム数により，次の 3 つに分かれる．

[1]　3 ゲームで A が勝者になる

A が 3 回続けて勝てばよいから，その確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

[2]　4 ゲームで A が勝者になる

3 ゲームまでに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 ゲーム目をA が勝てばよいから，その確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

[3]　5 ゲームで A が勝者になる

4 ゲームまでに A が 2 回，B が 2 回勝ち，5 ゲーム目をA が勝てばよいから，その確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

これらは互いに排反であるから，求める確率は　$\frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$

第 25 問【1 次元ランダムウォークの確率】

数直線上の原点に点 P がある．点 P を，1 個のさいころを投げて 1，2，3，4 の目が出たら $+2$ だけ，5，6 の目が出たら -1 だけ移動させる．さいころを 4 回投げたときの P の座標 p が次のようになる確率を求めよ．

(1)　$p=8$　　(2)　$p=2$　　(3)　$p=0$

＜解＞

1 個のさいころを投げて，1，2，3，4 の目が出る確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

さいころを 4 回投げたとき，1，2，3，4 の目が出る回数を n とすると

$$\underline{2\cdot n+(-1)\cdot(4-n)=p \qquad \text{すなわち} \quad 3n-4=p}$$

(1)　$3n-4=8$ を解くと　$n=4$

よって，さいころを 4 回投げたとき，$p=8$ となるのは，1，2，3，4 の目が 4 回出たときである．

したがって，求める確率は　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

(2)　$3n-4=2$ を解くと　$n=2$

よって，さいころを 4 回投げたとき，$p=2$ となるのは，1，2，3，4 の目が 2 回出たときである．

したがって，求める確率は　${}_4C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$

(3)　$3n-4=0$ を満たす自然数 n はない．よって，$p=0$ となることはない．

したがって，求める確率は　0

第 26 問【期待値】

白玉 3 個と黒玉 6 個が入っている袋から，同時に玉を 5 個取り出すとき，白玉の出る個数の期待値を求めよ．また，この袋から 1 個取り出してもとに戻すことを 5 回行うとき，白玉が出る回数の期待値を求めよ．

＜解＞

同時に玉を 5 個取り出すとき，白玉の出る個数は 0 個，1 個，2 個，3 個の 4 通りがあり，それぞれの場合が起こる確率は

$$\frac{{}_6C_5}{{}_9C_5}=\frac{2}{42},\quad \frac{{}_3C_1\times{}_6C_4}{{}_9C_5}=\frac{15}{42},\quad \frac{{}_3C_2\times{}_6C_3}{{}_9C_5}=\frac{20}{42},\quad \frac{{}_3C_3\times{}_6C_2}{{}_9C_5}=\frac{5}{42}$$

よって，白玉の出る個数の期待値は

$$0\times\frac{2}{42}+1\times\frac{15}{42}+2\times\frac{20}{42}+3\times\frac{5}{42}=\frac{5}{3}\ (\text{個})$$

1 個取り出してもとに戻すことを 5 回行うとき，白玉が出る回数は 0 回，1 回，2 回，3 回，4 回，5 回 の 6 通りがあり，それぞれの場合が起こる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243},\quad {}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243},\quad {}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243},$$

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243},\quad {}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{243},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

よって，白玉が出る回数の期待値は

$$0\times\frac{32}{243}+1\times\frac{80}{243}+2\times\frac{80}{243}+3\times\frac{40}{243}+4\times\frac{10}{243}+5\times\frac{1}{243}=\frac{5}{3}\ (\text{回})$$

第 27 問【確率漸化式】

ある工作機械が故障しなかった日の翌日に故障しない確率は $\frac{1}{2}$，故障した日の翌日に故障する確率は $\frac{1}{3}$ である．きょう，この工作機械は故障した．n 日後に故障しない確率を p_n とするとき

(1)　p_1，p_2，p_3 を求めよ．　　　(2)　p_n を求めよ．

＜解＞

(1)　$p_1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，　$p_2=\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}(1-p_1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$，

$p_3=\frac{1}{2}p_2+\frac{2}{3}(1-p_2)=\frac{5}{18}+\frac{8}{27}=\frac{31}{54}$

(2)　n 日後に故障しないで $n+1$ 日後も故障しない事象と，n 日後に故障して $n+1$ 日後は故障しない事象は，互いに排反であるから，p_{n+1} と p_n の関係は

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n)$$

よって　$p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}$　　ゆえに　$p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$

また　$p_1-\frac{4}{7}=\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{2}{21}$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{4}{7}\right\}$ は初項 $\frac{2}{21}$，公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{4}{7}=\frac{2}{21}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

したがって　$p_n=\frac{4}{7}+\frac{2}{21}\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^n=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$