命題と証明

重要例題集　命題と証明

第 1 問【命題の真偽】

x は実数とする．集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ．

(1)　$|x|<3$　ならば　$x<3$　　　(2)　$|x|\leqq 2$　ならば　$|x-1|<3$

(3)　$x>-1$ ならば　$x^2>1$　　　(4)　$|x|>2$　ならば　$x^2>4$

＜解＞

(1)　$\mathrm{P}=\{x \mid |x|<3\}$，$\mathrm{Q}=\{x \mid x<3\}$ とする．

$\mathrm{P}=\{x \mid -3<x<3\}$ であるから　$\mathrm{P}\subset\mathrm{Q}$　　よって，命題は　真

(2)　$\mathrm{P}=\{x \mid |x|\leqq 2\}$，$\mathrm{Q}=\{x \mid |x-1|<3\}$ とする．

$\mathrm{P}=\{x \mid -2\leqq x\leqq 2\}$，$\mathrm{Q}=\{x \mid -2<x<4\}$ であるから　$\mathrm{P}\not\subset\mathrm{Q}$

よって，命題は　偽

(3)　$\mathrm{P}=\{x \mid x>-1\}$，$\mathrm{Q}=\{x \mid x^2>1\}$ とする．

$\mathrm{Q}=\{x \mid x<-1$ または $1<x\}$ であるから　$\mathrm{P}\not\subset\mathrm{Q}$　　よって，命題は　偽

(4)　$\mathrm{P}=\{x \mid |x|>2\}$，$\mathrm{Q}=\{x \mid x^2>4\}$ とする．

$\mathrm{P}=\{x \mid x<-2$ または $2<x\}$，$\mathrm{Q}=\{x \mid x<-2$ または $2<x\}$ であるから　$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$

よって，命題は　真

第 2 問【条件の否定】

次の条件の否定をいえ．ただし，x は実数，n は整数とする．

(1)　$x>8$ または $x<3$　　　(2)　$x\geqq 5$ かつ $x\leqq 10$

(3)　n は偶数　または　10 以上　　　(4)　n は奇数　かつ　10 より小さい

＜解＞

(1)　$x\leqq 8$　かつ　$x\geqq 3$（すなわち　$3\leqq x\leqq 8$）　(2)　$x<5$　または　$x>10$

(3)　n は奇数　かつ　10 より小さい　　(4)　n は偶数　または　10 以上

第 3 問【同値】

a，b を実数とする．次のうち，互いに同値であるものを選べ．

① $ab=0$　　② $a^2+b^2=0$　　③ $a=0$ かつ $b=0$

④ $a^2+b^2>0$　　⑤ $a=0$ または $b=0$　　⑥ $a\neq 0$ または $b\neq 0$

＜解＞

「$ab=0 \Longrightarrow a=0$ または $b=0$」は真．

「$a=0$ または $b=0 \Longrightarrow ab=0$」は真．

「$a^2+b^2=0 \Longrightarrow a=b=0$」は真．

「$a=b=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$」は真．

「$a^2+b^2>0 \Longrightarrow a\neq 0$ または $b\neq 0$」は真．

「$a\neq 0$ または $b\neq 0 \Longrightarrow a^2+b^2>0$」は真．

以上から，互いに同値であるものは　①と⑤，②と③，④と⑥

第 4 問【必要条件・十分条件・必要十分条件】

x，y は実数とする．次の $\boxed{}$ 内に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち，最も適するものを入れよ．いずれでもないものには×印をつけよ．

(1)　$x=2$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{}$

(2)　$x\neq 0$ は $(x-1)(x-2)=0$ であるための $\boxed{}$

(3)　$xy=1$ は $x=1$ であるための $\boxed{}$

(4)　$|x|=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$

(5)　$x>0$，$y>0$ とする．$\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$ は $x=y$ であるための $\boxed{}$

(6)　$x=y=2$ は $2x-y=2y-2=2$ であるための $\boxed{}$

(7)　$|x|>x$ は $x<0$ であるための $\boxed{}$

<解>

(1) 「$x=2 \Longrightarrow x^2-5x+6=0$」は真

また，$x^2-5x+6=0$ を解くと　$x=2,\ 3$

よって，「$x^2-5x+6=0 \Longrightarrow x=2$」は偽

ゆえに　　　　　　十分条件

(2) 「$x \fallingdotseq 0 \Longrightarrow (x-1)(x-2)=0$」は，$x=3$ のとき成り立たない．ゆえに，偽

また，$(x-1)(x-2)=0$ を解くと　$x=1,\ 2$

よって，「$(x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow x \fallingdotseq 0$」は真

ゆえに　　　　　　必要条件

(3) 「$xy=1 \Longrightarrow x=1$」は，$x=-1,\ y=-1$ のとき成り立たない．ゆえに，偽

「$x=1 \Longrightarrow xy=1$」は，$x=1,\ y=0$ のとき成り立たない．ゆえに，偽

よって，いずれでもないから　×

(4) 「$|x|=0 \Longrightarrow x=0$」は真　　　　「$x=0 \Longrightarrow |x|=0$」は真

よって　　　　　　必要十分条件

(5) $\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$ とすると　$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=(\sqrt{xy})^2$

整理して　$(x-y)^2=0$　　　　したがって　$x=y$

ゆえに，「$\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{xy} \Longrightarrow x=y$」は真

また，相加・相乗平均の関係から，「$x=y \Longrightarrow \dfrac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$」は真

よって　　　　　　必要十分条件

(6) 「$x=y=2 \Longrightarrow 2x-y=2y-2=2$」は真

また，$2x-y=2y-2=2$ とする．

$2y-2=2$ から　$y=2$　　　　$2x-y=2$ に代入して　$x=2$

よって，「$2x-y=2y-2=2 \Longrightarrow x=y=2$」は真

ゆえに　　　　　　必要十分条件

(7) $|x|>x$ とする．

$x<0$ のとき，$-x>x$ から　$x<0$

$x>0$ のとき，$x>x$ となり，x は存在しない．したがって　$x<0$

ゆえに，「$|x|>x \Longrightarrow x<0$」は真　　また，「$x<0 \Longrightarrow |x|>x$」は真

よって　　　　　　必要十分条件

第 5 問【命題の、逆・裏・対偶】

x，y は実数とする．次の命題の逆，対偶，裏を述べよ．また，それらの真偽をいえ．

(1)　$x=2$ ならば $x^2-3x+2=0$

(2)　$5x+6=0$ ならば $x=2$ または $x=3$

(3)　$0<x<3$ ならば $x^2<9$

(4)　x，y がともに有理数ならば $x+y$ は有理数である．

＜解＞

(1)　逆：「$x^2-3x+2=0$ ならば $x=2$」

$x^2-3x+2=0$ とすると　$x=1,\ 2$　　よって，逆は偽である．

対偶：「$x^2-3x+2\fallingdotseq 0$ ならば $x\fallingdotseq 2$」

$x^2-3x+2\fallingdotseq 0$ とすると　$x\fallingdotseq 1$ かつ $x\fallingdotseq 2$　　よって，対偶は真である．

裏：「$x\fallingdotseq 2$ ならば $x^2-3x+2\fallingdotseq 0$」

$x=1$ のとき，$x^2-3x+2=0$ である．　　よって，裏は偽である．

(2)　逆：「$x=2$ または $x=3$ ならば $5x+6=0$」

$x=2$，$x=3$ は $5x+6=0$ を満たさない．　　よって，逆は偽である．

対偶：「$x\fallingdotseq 2$ かつ $x\fallingdotseq 3$ ならば $5x+6\fallingdotseq 0$」

$x=-\dfrac{6}{5}$ のとき，$5x+6=0$ である．　　よって，対偶は偽である．

裏：「$5x+6\fallingdotseq 0$ ならば $x\fallingdotseq 2$ かつ $x\fallingdotseq 3$」

$5x+6\fallingdotseq 0$ ならば $x\fallingdotseq -\dfrac{6}{5}$ である．　　よって，裏は偽である．

(3)　逆：「$x^2<9$ ならば $0<x<3$」

$x^2<9$ とすると　$-3<x<3$　　$\{x \mid -3<x<3\}\subset\{x \mid 0<x<3\}$ である．

よって，逆は偽である．

対偶：「$x^2\geqq 9$ ならば $x\leqq 0$ または $3\leqq x$」

$x^2\geqq 9$ とすると　$x\leqq -3$ または $3\leqq x$

$\{x \mid x\leqq -3$ または $3\leqq x\}\subset\{x \mid x\leqq 0$ または $3\leqq x\}$

よって，対偶は真である．

裏：「$x\leqq 0$ または $3\leqq x$ ならば $x^2\geqq 9$」

$\{x \mid x\leqq 0$ または $3\leqq x\}\subset\{x \mid x\leqq -3$ または $3\leqq x\}$

よって，裏は偽である

(4)　逆：「$x+y$ が有理数ならば x，y はともに有理数である．」

$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき，$x+y$ は有理数であるが，x，y は有理数でない．

よって，逆は偽である．

対偶：「$x+y$ が無理数ならば x と y の少なくとも一方は無理数である．」

もとの命題は真であるから，対偶も真である．

裏：「x と y の少なくとも一方が無理数ならば $x+y$ は無理数である．」

$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき，$x+y$ は有理数である．

よって，裏は偽である．

第 6 問【背理法による証明】

> a，b を自然数とするとき，次のことを背理法によって証明せよ．
> (1)　ab が奇数ならば，a，b はともに奇数である．
> (2)　ab が偶数ならば，a と b の少なくとも一方は偶数である．

＜解＞

(1)　ab が奇数ならば，a と b の少なくとも一方は偶数であると仮定する．

a と b の少なくとも一方が偶数であるとき，ab は偶数となる．これは，ab が奇数であることに矛盾する．

よって，ab が奇数ならば，a，b はともに奇数である．

(2)　ab が偶数ならば，a，b はともに奇数であると仮定する．

a，b がともに奇数であるとき，ab は奇数となるから，ab が偶数であることに矛盾する．

よって，ab が偶数ならば，a と b の少なくとも一方は偶数である．

第 7 問【背理法による証明－無理数】

$\sqrt{6}$ は無理数である．このことを用いて $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ

＜解＞

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ が無理数ではないと仮定すると，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は有理数である．

そこで，$\sqrt{3}-\sqrt{2}=r$ (r は有理数) とおくと　$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=r^2$

よって　$5-2\sqrt{6}=r^2$　すなわち　$\sqrt{6}=\dfrac{5-r^2}{2}$　……①

① の左辺は無理数．r が有理数であるから，① の右辺は有理数．

これは矛盾である．したがって，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は無理数である．

第 8 問【背理法による証明－素数（有名問題)】

素数は有限個ではないことを示せ．

＜解＞

素数が有限個（n個）であると仮定する．それを

$a_1, a_2, \cdots, a_n$とする．

このとき，

$N=a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_n+1$

という数 N は，$a_1, a_2, \cdots, a_n$のどの素数でもわれないので，N は素数となる．

素数がn個であると仮定したのに対し，N は$n+1$個目の素数となり，矛盾する．

よって，素数は有限個ではない．

第 9 問【有理数と無理数】

次の等式を満たす有理数 p，q の値を求めよ．

(1)　$(\sqrt{2}-1)p+q\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$　　　(2)　$\dfrac{p}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{q}{\sqrt{2}}=1$

＜解＞

a，b が有理数，u が無理数で，$a+bu=0$ であるならば $a=0$，$b=0$ であることを利用する．また，$\sqrt{2}$ は無理数である．

(1)　等式から　　$\sqrt{2}p-p+q\sqrt{2}-2-\sqrt{2}=0$

整理して　　$(-p-2)+(p+q-1)\sqrt{2}=0$

$-p-2$，$p+q-1$ は有理数であるから　　$-p-2=0$，$p+q-1=0$

これを解いて　　$p=-2$，$q=3$

(2)　等式から　　$\sqrt{2}p+(\sqrt{2}-1)q=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

整理して　　$(-q-2)+(p+q+1)\sqrt{2}=0$

$-p-2$，$p+q+1$ は有理数であるから　　$-q-2=0$，$p+q+1=0$

これを解いて　　$p=1$，$q=-2$

第 10 問【整数問題－証明（偶数・奇数）】

次のことを証明せよ．

(1)　連続した 2 つの整数の平方の差は奇数である．

(2)　連続した 2 つの奇数の平方の和から 2 を引いた数は，8 の倍数である．

(3)　連続した 2 つの偶数の平方の差は，4 の倍数であるが，8 の倍数でない．

<解>

n を整数とする.

(1) $(n+1)^2-n^2=2n+1$

よって，連続した 2 つの整数の平方の差は奇数である.

(2) 連続した 2 つの奇数を $2n-1$，$2n+1$ とおく.

$(2n-1)^2+(2n+1)^2-2=4n^2-4n+1+4n^2+4n+1-2=8n^2$

よって，連続した 2 つの奇数の平方の和から 2 を引いた数は，8 の倍数である.

(3) 連続した 2 つの偶数を $2n$，$2n+2$ とおく.

$(2n+2)^2-(2n)^2=4n^2+8n+4-4n^2=4(2n+1)$

よって，連続した 2 つの偶数の平方の差は，4 の倍数であるが，8 の倍数ではない.

第 11 問【整数問題－証明（剰余系）】

n は整数とする．次のことを証明せよ.

(1) n^2+5n+4 は偶数である.

(2) n^2+1 は 3 の倍数でない.

<解>

k を整数とする.

(1) $n=2k$ のとき $n^2+5n+4=(2k)^2+5\cdot 2k+4=2(2k^2+5k+2)$

$n=2k+1$ のとき $n^2+5n+4=(2k+1)^2+5(2k+1)+4=2(2k^2+7k+5)$

したがって，いずれの場合も n^2+5n+4 は偶数である.

別解 (与式)$=n(n+1)+4(n+1)$ であり，連続する 2 整数の積 $n(n+1)$ は偶数で，$4(n+1)$ も偶数であるから，n^2+5n+4 は偶数である.

(2) $n=3k$ のとき $n^2+1=9k^2+1=3(3k^2)+1$

$n=3k+1$ のとき $n^2+1=(3k+1)^2+1=3(3k^2+2k)+2$

$n=3k+2$ のとき $n^2+1=(3k+2)^2+1=3(3k^2+4k+1)+2$

したがって，いずれの場合も n^2+1 は 3 の倍数でない.