平面図形

重要例題集　平面図形

第 1 問【三角形の成立条件】

次の長さの線分を 3 辺とする三角形が存在するかどうか調べよ．

(1)　3，4，6　　(2)　5，7，8　　(3)　2，3，6

＜解＞

(1)　$|3-4|<6<3+4$ が成り立つから，三角形は 存在する．

(2)　$|5-7|<8<5+7$ が成り立つから，三角形 は存在する．

(3)　$6>2+3$ であるから，三角形は 存在しない．

第 2 問【平行四辺形と線分の比】

平行四辺形 ABCD において，辺 AD を 2 : 1 の比に外分する点を P とする．BP と AC，DC の交点をそれぞれ Q，R とするとき，Q，R は線分 AC，DC をそれぞれどんな比に内分するか．

＜解＞

$\triangle QAP \backsim \triangle QCB$ であるから　　$AQ : CQ = AP : CB$

一方，$AP : PD = 2 : 1$ であるから　　$AP : CB = 2 : 1$

よって，Q は線分 AC を 2 : 1 の比に内分する．

また，$\triangle RDP \backsim \triangle RCB$ であるから　　$DR : CR = DP : CB = 1 : 1$

ゆえに，R は線分 DC を 1 : 1 の比に内分する．

第 3 問【角の二等分線定理】

辺 AB，BC，CA の長さがそれぞれ 6，5，4 である三角形 ABC において，∠A の 2 等分線，∠A の外角の 2 等分線と BC との交点をそれぞれ P，Q とするとき，PQ の長さはいくらか．

＜解＞

AB : AC＝3 : 2，BC＝5 であるから

BP : PC＝3 : 2 より　　PC＝2

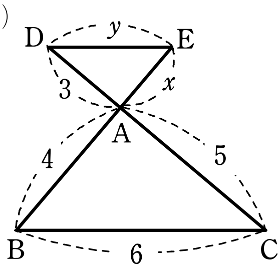
BQ : CQ＝3 : 2 より　　CQ＝2BC＝10

よって　　PQ＝PC＋CQ＝2＋10＝12

第 4 問【平行線の性質】

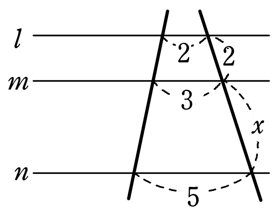
下の図において，x，y の値を求めよ．

(1)



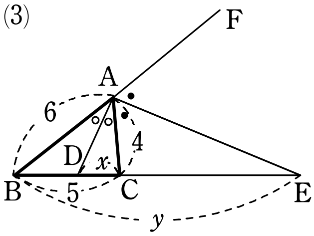
BC∥DE

(2)



l∥m∥n

(3)



∠BAD＝∠DAC,
∠CAE＝∠EAF

＜解＞

(1)　BC∥DE であるから　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}$

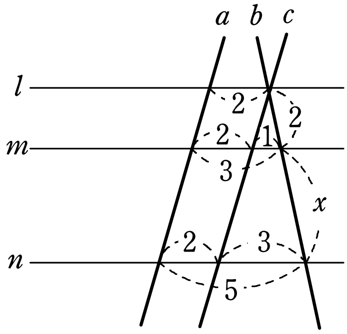
すなわち　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AE}$

よって　$4\cdot3=5\cdot x$　　ゆえに　$x=\dfrac{12}{5}$

また，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{ED}}$ から　$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$

よって　$5\cdot y=3\cdot6$　　ゆえに　$y=\dfrac{18}{5}$

(2)　右の図において $l\parallel m\parallel n$，$a\parallel c$ とすると



$$\frac{2}{2+x}=\frac{1}{3}$$

すなわち　$2\cdot3=(2+x)\cdot1$

ゆえに　$x=4$

(3)　∠A の 2 等分線と辺 BC の交点が D であるから

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$　すなわち　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

よって　$6\cdot x=4\cdot(5-x)$　　ゆえに　$x=2$

また，∠A の外角の 2 等分線と辺 BC の延長の交点が E であるから

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$　すなわち　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{EC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}$

よって　$6\cdot(y-5)=4\cdot y$　　ゆえに　$y=15$

第 5 問【三角形の面積比 1】

△ABC の辺 AB を 1 : 2 の比に内分する点を D，辺 BC の中点を E とする．また，AE と CD の交点を P とするとき，次の値を求めよ．

(1)　$\dfrac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{PAC}}$　　(2)　$\dfrac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{PAC}}$　　(3)　$\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{PAC}}$

<解>

(1) $\dfrac{\triangle PAB}{\triangle PAC}=\dfrac{BE}{CE}=1$　　(2) $\dfrac{\triangle PBC}{\triangle PAC}=\dfrac{BD}{AD}=2$

(3) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle PAC}=\dfrac{\triangle PAC+\triangle PAB+\triangle PBC}{\triangle PAC}=1+\dfrac{\triangle PAB}{\triangle PAC}+\dfrac{\triangle PBC}{\triangle PAC}$

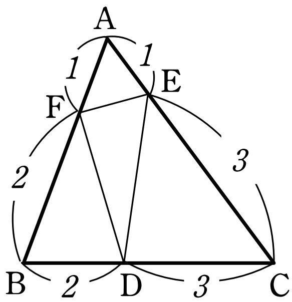
$=1+1+2=4$

第 6 問【三角形の面積比２】

△ABC の辺 BC を 2 : 3，辺 CA を 3 : 1，辺 AB を 1 : 2 の比に内分する点をそれぞれ D，E，F とするとき，次の値を求めよ．

(1) $\dfrac{\triangle AFE}{\triangle ABC}$　　(2) $\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$

<解>



(1) △AFE と △ABC は，∠A を共有するから

$$\frac{\triangle AFE}{\triangle ABC}=\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

(2) (1) と同様に

$$\frac{\triangle BDF}{\triangle BCA}=\frac{BD}{BC}\cdot\frac{BF}{BA}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{\triangle CED}{\triangle CAB}=\frac{CE}{CA}\cdot\frac{CD}{CB}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$$

一方　$\triangle DEF=\triangle ABC-\triangle AFE-\triangle BDF-\triangle CED$

両辺を △ABC で割ると

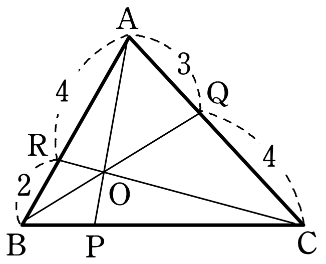
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=1-\frac{\triangle AFE}{\triangle ABC}-\frac{\triangle BDF}{\triangle ABC}-\frac{\triangle CED}{\triangle ABC}$$

$$=1-\frac{1}{12}-\frac{4}{15}-\frac{9}{20}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

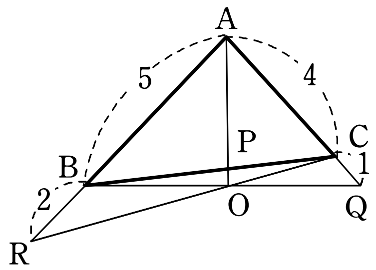
第 7 問【チェバの定理】

下の図において，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$ の値を求めよ．

(1)



(2)



＜解＞

(1)　チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=1$　　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{3}{8}$

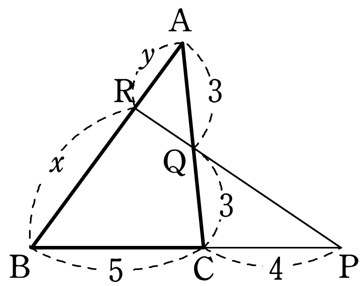
(2)　チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{7}{2}=1$　　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{10}{7}$

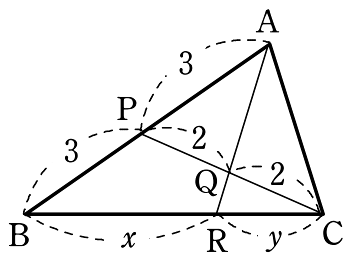
第 8 問【メネラウスの定理】

下の図において，$\dfrac{y}{x}$ の値を求めよ．

(1)



(2)



＜解＞

(1)　△ABC と直線 PR において，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

よって　$\frac{y}{x}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{3}=1$　　ゆえに　$\frac{y}{x}=\frac{4}{9}$

(2)　△PBC と直線 AR において，メネラウスの定理により

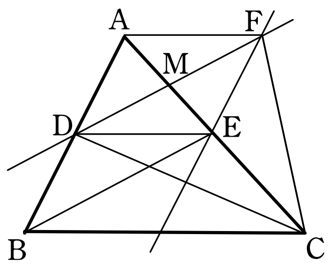
$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QC}}=1$$

よって　$\frac{y}{x}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{2}{2}=1$　　ゆえに　$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$

第 9 問【三角形の重心】

△ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ D，E とし，E を通り AB に平行な直線と，D を通り BE に平行な直線との交点を F とするとき，E は △CFD の重心であることを証明せよ．

＜解＞



AC と DF の交点を M とする．
四角形 DBEF は平行四辺形であるから　DB＝FE
DB＝AD から　AD＝FE　また　AD∥FE
よって，四角形 ADEF は平行四辺形である．
ゆえに　DM＝FM，　AM＝EM
E は辺 AC の中点であるから　CE : EM＝2 : 1
すなわち，E は △CFD の中線 CM を 2 : 1 の比に内分する点である．
したがって，E は △CFD の重心である．

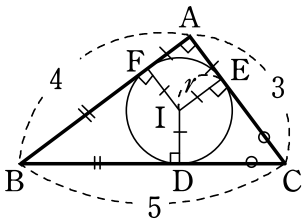
第 10 問【三角形の外心，垂心，内心】

> $\angle A=90^\circ$，$AB=4$，$AC=3$ の直角三角形 ABC について
> (1)　垂心，外心の位置を求めよ．
> (2)　外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めよ．

＜解＞

(1)　各頂点から対辺に下ろした 3 垂線は点 A で交わるから，△ABC の垂心は点 A である．各辺の垂直二等分線は辺 BC の中点で交わるから，△ABC の外心は辺 BC の中点である．

(2)　$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$



辺 BC の中点が外心であるから　　$R=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{5}{2}$

内心を I とし，内接円と辺 BC，CA，AB の接点をそれぞれ D，E，F とする．

$BF=BD$，$CE=CD$ から　　$BC=BD+CD=BF+CE$

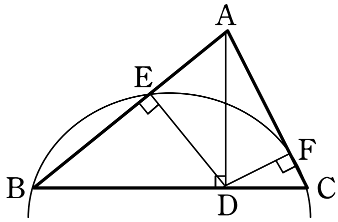
また，$IF\perp AB$，$IE\perp AC$，$IF=IE$，$AF=AE$，$\angle A=90^\circ$ であるから，四角形 AFIE は 1 辺の長さが r の正方形である．

よって，$BF=4-r$，$CE=3-r$ であるから　　$5=(4-r)+(3-r)$

ゆえに　　$r=1$

第 11 問【円周角の定理】

> △ABC の頂点 A から BC に下ろした垂線を AD とし，D から AB，AC に下ろした垂線をそれぞれ DE，DF とするとき，B，C，F，E は同一円周上にあることを証明せよ．



<解>

$\angle AED=\angle AFD=\angle R$ であるから，4 点 A，E，D，F は同一円周上にある．

よって　　　$\angle AFE=\angle ADE$

また，$\triangle ADE \backsim \triangle ABD$ であるから

　　　　　　$\angle ADE=\angle ABD$　　　　　　　ゆえに　　$\angle AFE=\angle EBC$

したがって，B，C，F，E は同一円周上にある．

第 12 問【円と接線（接弦定理）】

AB を直径とする円 O の外部の点を C とし，CA，CB が円と交わる点を P，Q とすると，OP は C，P，Q を通る円の接線であることを証明せよ．ただし，C は直線 AB 上にないものとする．

<解>

OP の延長上の点を T とする．

P が A に一致する場合　$\angle CPT=\angle R=\angle PQC$

よって，OP は C，P，Q を通る円の接線である．

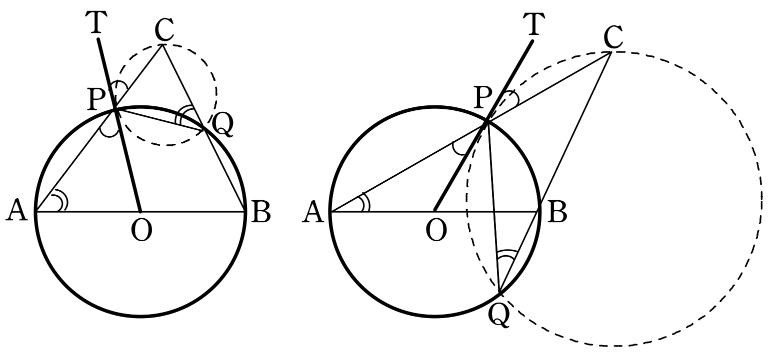
Q が B に一致する場合　$\angle CPT=\angle APO=\angle PAO=\angle PQC$

よって，OP は C，P，Q を通る円の接線である．

P，Q が同じ弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上または一方が反対側の弧上にくる場合

$$\angle CPT=\angle APO=\angle PAO=\angle PQC$$

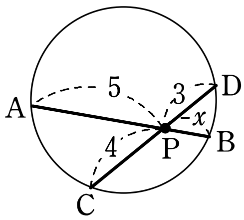
よって，OP は C，P，Q を通る円の接線である．



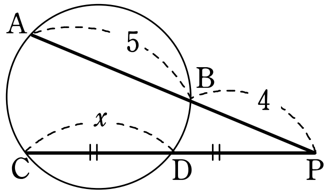
第 13 問【方べきの定理１】

右図において，x の値を求めよ．

(1)



(2)



＜解＞

(1)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

よって　　$5\cdot x=4\cdot 3$　　ゆえに　　$x=\dfrac{12}{5}$

(2)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

よって　　$(4+5)\cdot 4=2x\cdot x$　　ゆえに　$x^2=18$

$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

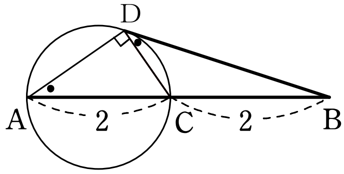
第 14 問【方べきの定理２】

長さが 4 である線分 AB の中点を C，直径 AC の円に点 B から引いた接線の接点を D とする．次のものを求めよ．

(1)　BD の長さ　　(2)　AD : CD　　(3)　AD，CD の長さ

＜解＞

(1)　方べきの定理により　　$BA\cdot BC=BD^2$



よって　　$BD^2=4\cdot 2=8$

$BD>0$ から　　$BD=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(2)　$\triangle ABD$ と $\triangle DBC$ において

$$\angle ABD=\angle DBC,\quad \angle BAD=\angle BDC$$

ゆえに　　$\triangle ABD \backsim \triangle DBC$

よって　　$AD:DC=AB:DB=4:2\sqrt{2}=2:\sqrt{2}$

(3)　(2) から，$AD=2k$，$CD=\sqrt{2}\,k$ $(k>0)$ と表される．

直角三角形 ADC において，ピタゴラスの定理により

$$AD^2+CD^2=AC^2 \qquad よって \qquad (2k)^2+(\sqrt{2}\,k)^2=2^2$$

したがって　　$k^2=\dfrac{2}{3}$　　　$k>0$ から　　$k=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

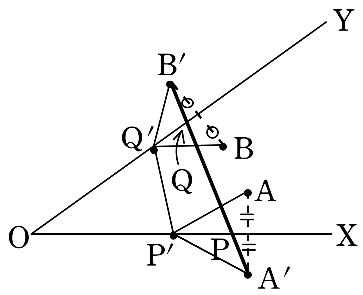
ゆえに　　$AD=2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，　$CD=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

第 15 問【折れ線の長さの最小値】

鋭角 $\angle XOY$ の内部に 2 点 A，B がある．半直線 OX，OY 上にそれぞれ点 P，Q をとり，$AP+PQ+QB$ を最小にするには，P，Q をそれぞれどのような位置にとればよいか．

＜解＞

図のように，直線 OX，OY に関して A，B と対称な点を，それぞれ A'，B'とする．



また，OX，OY 上に，それぞれ任意の点 P'，Q'をとる．

このとき，$AP'=A'P'$，$Q'B=Q'B'$ であるから

$$AP'+P'Q'+Q'B=A'P'+P'Q'+Q'B'$$

これは，A' から B' への経路を表す．

2 点 A'，B' の最短経路は，線分 $A'B'$ であるから，

P，Q を，それぞれ線分 $A'B'$ と直線 OX，OY との交点にとればよい．