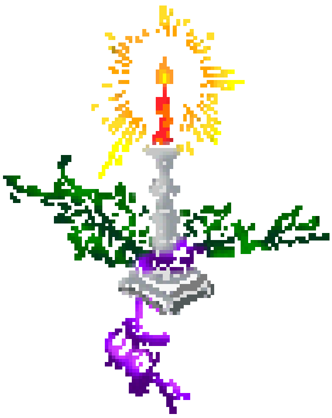
等差数列と等比数列



重要例題集　等差・等比数列

第 1 問【一般項を読み取ろう】

次の数列の第 k 項 a_k $(1\leqq k\leqq n)$ を，n と k を用いて表せ．

(1)　$(2n-1)^2$，$(2n-3)^2$，$(2n-5)^2$，……，25，9，1

(2)　$\sqrt{n}$，$2\sqrt{n-1}$，$3\sqrt{n-2}$，……，$(n-2)\sqrt{3}$，$(n-1)\sqrt{2}$，n

＜解＞

(1)　この数列の第 k 項は $\{2n-(2k-1)\}^2$ である．すなわち　　$a_k=(2n-2k+1)^2$

(2)　この数列の第 k 項は $k\sqrt{n-(k-1)}$ である．すなわち　　$a_k=k\sqrt{n-k+1}$

第 2 問【等差数列の基本】

第 16 項が -50，第 21 項が -80 である等差数列の，初項と公差を求めよ．
また，4 はこの数列の第何項か．

＜解＞

この数列の初項を a，公差を d，第 n 項を a_n とすると

$a_n=a+(n-1)d$

$a_{16}=-50$，$a_{21}=-80$ であるから

$-50=a+15d$，$-80=a+20d$

これを解いて　　　　　　$a=40$，$d=-6$

よって　　　　　　$a_n=40+(n-1)\cdot(-6)=-6n+46$

$a_n=4$ とすると　$4=-6n+46$

ゆえに　　$n=7$

したがって，初項 40，公差 -6 であり，4 はこの数列の第 7 項である．

第 3 問【等差数列の証明】

$a_n=3-4n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項を，初項から 2 つおきにとってできる数列 a_1，a_4，a_7，…… は等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ．

＜解＞

(1)

$a_{n+1}-a_n=\{3-4(n+1)\}-(3-4n)=-4$

よって，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である．

また，初項は　$a_1=3-4\cdot 1=-1$，公差は　-4

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項を，初項から 2 つおきにとってできる数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_n=a_{3n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

よって　$b_n=3-4(3n-2)=11-12n$

ゆえに

$b_{n+1}-b_n=\{11-12(n+1)\}-(11-12n)=-12$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である．

また，初項は　$a_1=-1$，公差は　-12

第 4 問【等差数列の共通項 1】

初項 a，公差 3 の等差数列と，初項 b，公差 5 の等差数列を考える．

$(a,\ b)=(2,\ 4)$，$(1,\ 5)$ の各場合について，次の (1)，(2) を求めよ．

(1)　これら 2 つの数列に共通に含まれる数の最小値．

(2)　これら 2 つの数列に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列の第 n 項．

＜解＞

初項 a，公差 3 の等差数列を $\{a_n\}$，初項 b，公差 5 の等差数列を $\{b_n\}$ とする．

(1)　$(a,\ b)=(2,\ 4)$ のとき

$\{a_n\}$ の各項は　2，5，8，11，14，17，……

$\{b_n\}$ の各項は　4，9，14，19，24，29，……

よって　　　　14

$(a,\ b)=(1,\ 5)$ のとき

$\{a_n\}$ の各項は　1，4，7，10，13，16，……

$\{b_n\}$ の各項は　5，10，15，20，25，30，……

よって　　　　10

(2)　共通に含まれる項を順に並べてできる数列は，2 つの等差数列の公差 3，5 の最小公倍数 15 を公差とする等差数列である．

$(a,\ b)=(2,\ 4)$ のとき

初項が 14，公差が 15 の等差数列ができるから，第 n 項は

$$14+(n-1)\cdot 15=15n-1$$

$(a,\ b)=(1,\ 5)$ のとき

初項が 10，公差が 15 の等差数列ができるから，第 n 項は

$$10+(n-1)\cdot 15=15n-5$$

第 5 問【等差数列の共通項２】

$a_n=5n+6$, $b_n=3n+4$ で表される数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通な数を順に並べるとどんな数列になるか.

＜解＞

$\{a_n\}$ の第 k 項と $\{b_n\}$ の第 l 項が等しいとすると

$$5k+6=3l+4$$

これを整理して　$5(k+1)=3(l+1)$

5 と 3 は 1 以外に公約数をもたないから

$k+1=3m$　$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　とおける.

よって，共通項は　$5k+6=5(3m-1)+6=15m+1$

$$=15(m-1)+15+1=16+(m-1)\cdot 15$$

したがって，求める数列は　初項 16，公差 15 の等差数列

第 6 問【等差数列の和】

初項が 50，公差が -3 である等差数列について

(1)　初項から第何項までの和が最大であるか.

(2)　初項から第何項までの和が初めて負となるか.

＜解＞

(1)　この数列の第 n 項を a_n とすると　$a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$ とおくと　$-3n+53<0$　よって　$n>\dfrac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$

ゆえに，この数列の項は第 18 項から負に変わるから，初項から第 17 項までの和が最大である.

(2)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-3)\}=\frac{n(103-3n)}{2}$$

$S_n<0$ とおくと　$\dfrac{n(103-3n)}{2}<0$　よって　$n(3n-103)>0$

$n>0$ であるから　$3n-103>0$　ゆえに　$n>\dfrac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$

したがって，初項から第 35 項までの和が初めて負となる.

第 7 問【倍数と等差数列】

1 から 100 までの自然数のうち，次の和を求めよ．
(1)　3 の倍数の和　　(2)　5 の倍数の和　　(3)　15 の倍数の和
(4)　3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる数の和
(5)　5 で割り切れない数の和

＜解＞

1 から 100 までの自然数で，n の倍数であるものの和を $S(n)$ とする．

(1)　3 の倍数を順に並べると

$$3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33$$

となる．この数列は，初項 3，末項 99，項数 33 の等差数列であるから

$$S(3)=\frac{1}{2}\cdot33(3+99)=1683$$

(2)　5 の倍数を順に並べると

$$5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20$$

となる．この数列は，初項 5，末項 100，項数 20 の等差数列であるから

$$S(5)=\frac{1}{2}\cdot20(5+100)=1050$$

(3)　15 の倍数を順に並べると

$$15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6$$

となる．この数列は，初項 15，末項 90，項数 6の等差数列であるから

$$S(15)=\frac{1}{2}\cdot6(15+90)=315$$

(4)　求める和は，3 の倍数または 5 の倍数の和であるから，(1)～(3) より

$$S(3)+S(5)-S(15)=1683+1050-315=2418$$

(5)　1 から 100 までの自然数の和 S は　$S=\frac{1}{2}\cdot100\cdot101=5050$

1 ～ 100 までの自然数全体の集合において，5 で割り切れない数全体の集合は，5 の倍数全体の集合の補集合であるから，求める和は (2) より

$$S-S(5)=5050-1050=4000$$

第８問【等差数列の応用１－法則性を読み取る】

-5 と 15 の間に n 個の数を入れて等差数列を作ると，その総和が 100 になった．このとき，n の値と公差を求めよ．

＜解＞

この等差数列の項数は　$n+2$

初項から第 $(n+2)$ 項までの和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(n+2)(-5+15)=5n+10$$

$S=100$ であるから　$5n+10=100$　　よって　$n=18$

また，公差を d とすると　$-5+\{(18+2)-1\}d=15$　　ゆえに　$d=\frac{20}{19}$

したがって　$n=18$，公差 $\frac{20}{19}$

第９問【等差数列の応用２－既約分数の和】

a，b は正の整数で $a<b$ とする．a と b との間にあって，5 を分母とするすべての分数（整数を除く）の和を求めよ．

＜解＞

a から b までの 5 を分母とする分数（整数を含む）を書き出すと

$$\frac{5a}{5},\ \frac{5a+1}{5},\ \frac{5a+2}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5b-1}{5},\ \frac{5b}{5}$$

これは，初項 a，末項 b，公差 $\frac{1}{5}$，項数 $5(b-a)+1$ の等差数列である．

したがって，その和を S とすると　$S=\frac{5(b-a)+1}{2}(a+b)$

また，a から b までの整数の和を S' とすると　$S'=\frac{b-a+1}{2}(a+b)$

求める和は $S-S'$ であるから

$$\frac{5(b-a)+1}{2}(a+b)-\frac{b-a+1}{2}(a+b)=2(b-a)(a+b)=2(b^2-a^2)$$

第 10 問【等比数列の基本】

次の等比数列で，指定されたものを求めよ．
(1)　初項が 5，公比が 2，項数が 8 のとき　末項
(2)　公比 が 4，第 10 項が 4096 のとき　初項
(3)　第 5 項が -27，第 7 項が -243 のとき　初項と公比
(4)　第 2 項が 96，第 4 項が 24 のとき　第 7 項

＜解＞

(1)　第 n 項は $5\cdot2^{n-1}$ であるから，末項は　$5\cdot2^{8-1}=640$

(2)　初項を a とすると，第 n 項は　$a\cdot4^{n-1}$

第 10 項が 4096 であるから　$a\cdot4^{9}=4096$　よって　$a=\dfrac{1}{64}$

(3)　初項を a，公比を r とする．

第 5 項，第 7 項について　$ar^4=-27$，$ar^6=-243$

$ar^6=(ar^4)r^2$ であるから　$-27r^2=-243$

よって　$r^2=9$　ゆえに　$r=\pm3$

このとき　$a=\dfrac{-27}{r^4}=\dfrac{-27}{81}=-\dfrac{1}{3}$

したがって　初項 $-\dfrac{1}{3}$，公比 3　または　初項 $-\dfrac{1}{3}$，公比 -3

(4)　初項を a，公比を r，第 n 項を a_n とする．

第 2 項，第 4 項について　$ar=96$，　$ar^3=24$

$ar^3=(ar)r^2$ であるから　$96r^2=24$

よって　$r^2=\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$r=\pm\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$ のとき　$a_7=a_4r^3=24\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=3$

$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a_7=a_4r^3=24\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=-3$

したがって　3　または　-3

第 11 問【等比数列の和】

次の等比数列で，指定されたものを求めよ．
(1)　公比が -2，初項から第 10 項までの和が -1023 のとき　初項
(2)　第 2 項が 6，初項から第 3 項までの和が 21 のとき　初項と公比

＜解＞

(1)　初項を a とすると，初項から第 10 項までの和が -1023 であるから

$$\frac{a\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-1023$$ 　ゆえに　$a=3$　　よって　初項は　3

(2)　初項を a，公比を r とする．
第 2 項が 6 であるから　$ar=6$ …… ①
また，初項から第 3 項までの和が 21 であるから
$a+ar+ar^2=21$　よって　$a(1+r+r^2)=21$ …… ②
これに ① を代入して　$6(1+r+r^2)=21r$　すなわち　$2r^2-5r+2=0$
ゆえに　$(r-2)(2r-1)=0$　したがって　$r=2,\ \dfrac{1}{2}$
① から　$(a,\ r)=(3,\ 2),\ \left(12,\ \dfrac{1}{2}\right)$
よって　初項 3，公比 2 または 初項 12，公比 $\dfrac{1}{2}$

第 12 問【等差・等比中項】

数列 a，b，c は等比数列で和が 19，数列 b，c，d は等差数列で和が 12 である．a，b，c，d の値を求めよ．

＜解＞

数列 a，b，c は等比数列であるから　$b^2=ac$ …… ①
また　$a+b+c=19$ …… ②
数列 b，c，d は等差数列であるから　$2c=b+d$ …… ③
また　$b+c+d=12$ …… ④
③ を ④ に代入すると　$2c+c=12$　よって　$c=4$ …… ⑤
⑤ を ①，② に代入して　$b^2=4a$，$a=15-b$ …… ⑥
⑥ の 2 式から a を消去して　$b^2=4(15-b)$
すなわち　$(b-6)(b+10)=0$　ゆえに　$b=6,\ -10$
$b=6$ のとき　⑥ から　$a=9$，　③，⑤ から　$d=2$
$b=-10$ のとき　⑥ から　$a=25$，　③，⑤ から　$d=18$
よって　$a=9$，$b=6$，$c=4$，$d=2$　または　$a=25$，$b=-10$，$c=4$，$d=18$

第 13 問【等差・等比数列の応用１－「等差＋等比」数列】

初項が 1 である等差数列 $\{a_n\}$ と，初項が 2 である等比数列 $\{b_n\}$ がある．$c_n=a_n+b_n$ とおくとき，$c_2=10$，$c_3=25$，$c_4=64$ である．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

＜解＞

$\{a_n\}$ の公差を d，$\{b_n\}$ の公比を r とおく．

$a_n=1+(n-1)d$，$b_n=2r^{n-1}$ から　$\underline{c_n=1+(n-1)d+2r^{n-1}}$

$c_2=10$，$c_3=25$，$c_4=64$ であるから

$1+d+2r=10$ ……①　$1+2d+2r^2=25$ ……②　$1+3d+2r^3=64$ ……③

① から　$d=9-2r$　これを ② に代入すると　$1+2(9-2r)+2r^2=25$

展開して整理すると　$r^2-2r-3=0$　これを解いて　$r=-1,\ 3$

$r=-1$ のとき $d=11$　このとき ③ の左辺は 32 となるから不適．

$r=3$ のとき $d=3$　このとき ③ の左辺は 64 となり適する．

ゆえに，条件を満たす d，r は　$d=3$，$r=3$

したがって　$c_n=1+3(n-1)+2\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}+3n-2$

第 14 問【等差・等比数列の応用２－「等差×等比」数列の和】

$1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$ を求めよ．

＜解＞

求める和を S とおく．

$$\boxed{\begin{aligned} S&=1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}\\ 3S&=\quad\ \ 3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+(n-1)3^{n-1}+n\cdot3^n\end{aligned}}$$

辺々引くと　$-2S=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n$

$$=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\cdot3^n=\frac{-1+3^n(1-2n)}{2}$$

ゆえに　$S=\dfrac{1+(2n-1)3^n}{4}$

第 15 問【複利計算】

毎年初めに x 円ずつを積み立てて，5 年間で 10 万円にしたい．何円ずつ貯金すればよいか．ただし，年利率 2 %，1 年ごとの複利で，$(1.02)^5=1.10$ として計算し，円未満は切り上げよ．

＜解＞

各年初めの元金は，1 年ごとに利息がついて 1.02 倍となる．

1 年目初めの x 円は，5 年後末には　$x(1.02)^5$ 円

2 年目初めの x 円は，5 年後末には　$x(1.02)^4$ 円

⋮

5 年目初めの x 円は，5 年後末には　$x\cdot 1.02$ 円　になる．

よって，5 年間での貯金の総額は

$$x\cdot 1.02+x(1.02)^2+\cdots\cdots+x(1.02)^5=\frac{1.02x\{(1.02)^5-1\}}{1.02-1}$$

$$=\frac{1.02x\times 0.1}{0.02}$$

これが 10 万円になるとすると　$\dfrac{1.02x\times 0.1}{0.02}=100000$

これを解いて　$x=19607.8\cdots\cdots$

円未満を切り上げて，求める金額は　19608 円