和の記号Σ·色々な数列

第１問【数列の和をΣで表そう】…**P2**
第２問【数列の和の計算（Σと和の基本計算)】…**P2**
第３問【数列の一般項を作り、和を計算する１】…**P3**
第４問【数列の一般項を作り、和を計算する２】…**P3**
第５問【数列の一般項を作り、和を計算する３】…**P4**
第６問【数列の一般項を作り、和を計算する４】…**P4**
第７問【差を作ってから和をとる１】…**P5**
第８問【差を作ってから和をとる２】…**P6**
第９問【階差数列の利用】…**P6**
第 10 問【和から一般項を求める１】…**P7**
第 11 問【和から一般項を求める２】…**P8**
第 12 問【応用問題１－整式の展開を利用して **2** 数の積の和を作る】…**P8**
第 13 問【応用問題２－格子点の数】…**P9**
第 14 問【群数列１】…**P11**
第 15 問【群数列２】…**P11**

重要例題集　和の記号Σ・色々な数列

第 1 問【数列の和をΣで表そう】

次の数列の初項から第 n 項までの和を $\sum$ を用いて表せ.

(1)　1, 4, 7, 10, ……　　　　(2)　1, 3, 9, 27, ……

＜解＞

(1)　第 n 項は $3n-2$ であるから　$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$

(2)　第 n 項は 3^{n-1} であるから　$\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

第 2 問【数列の和の計算（Σと和の基本計算)】

次の和を求めよ.

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-2)$　　(2)　$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$　　(3)　$\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)$

(4)　$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2$　　(5)　$\sum_{k=1}^{n}3^k$　　(6)　$\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}$

＜解＞

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-2)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n=n(n-1)$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)-3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}1=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-n$

$=n\{n(n^2+2n+1)-1\}=n(n^3+2n^2+n-1)$

(4)　$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2=9\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-6(n+1)+2\}=\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$

(5)　$\sum_{k=1}^{n}3^k=\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$　　(6)　$\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$

第３問【数列の一般項を作り、和を計算する１】

次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　2^2，4^2，6^2，8^2，……　　　(2)　$1\cdot2\cdot3$，$2\cdot3\cdot5$，$3\cdot4\cdot7$，$4\cdot5\cdot9$，……

＜解＞

数列の一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_nとする．

(1)　$\underline{a_n=(2n)^2=4n^2}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　$\underline{a_n=n(n+1)(2n+1)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}=\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$$

第４問【数列の一般項を作り、和を計算する２】

次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　1，$1+3$，$1+3+5$，$1+3+5+7$，……

(2)　1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

＜解＞

数列の一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1)　$\underline{a_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　$\underline{a_n=1+3+9+\cdots\cdots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

第５問【数列の一般項を作り、和を計算する３】

次の数列の第 k 項と，初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　$1^2+1\cdot2+2^2,\ 2^2+2\cdot3+3^2,\ 3^2+3\cdot4+4^2,\ \cdots\cdots$

(2)　$1^2,\ 1^2+3^2,\ 1^2+3^2+5^2,\ 1^2+3^2+5^2+7^2,\ \cdots\cdots$

＜解＞

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1)　$a_k=k^2+k(k+1)+(k+1)^2=3k^2+3k+1$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)+3(n+1)+2\}=n(n^2+3n+3)$$

(2)　$a_k=\sum_{n=1}^{k}(2n-1)^2=4\sum_{n=1}^{k}n^2-4\sum_{n=1}^{k}n+\sum_{n=1}^{k}1$

$$=4\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-4\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+k$$

$$=\frac{1}{3}k\{2(k+1)(2k+1)-6(k+1)+3\}=\frac{1}{3}(4k^3-k)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}(4k^3-k)=\frac{1}{3}\left[4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

第６問【数列の一般項を作り、和を計算する４】

次の数列の第 k 項と，初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　$1\cdot n,\ 3\cdot(n-1),\ 5\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot2,\ (2n-1)\cdot1$

(2)　$1^2\cdot n,\ 2^2\cdot(n-1),\ 3^2\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (n-1)^2\cdot2,\ n^2\cdot1$

＜解＞

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1)　$a_k=(2k-1)(n-k+1)$　$(1\leqq k\leqq n)$

$$S_n=\sum_{k-1}^{n}(2k-1)(n-k+1)=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\cdot n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　$a_k=k^2(n-k+1)$　$(1\leqq k\leqq n)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k+1)=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

第７問【差を作ってから和をとる１】

等式 $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ を利用して，次の和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

＜解＞

求める和は

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

第 8 問【差を作ってから和をとる２】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$ を求めよ．

＜解＞

$$\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}=\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$

であるから，求める和は

$$\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3})$$
$$+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

第 9 問【階差数列の利用】

次の数列の階差数列の第 k 項を求めよ．また，もとの数列の第 n 項を求めよ．

(1)　2，3，5，8，12，……　　　　(2)　1，2，5，14，41，……

＜解＞

(1)　階差数列は 1，2，3，4，…… となるから，この数列の第 k 項は　k

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=2+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}(n^2-n+4)\quad\cdots\cdots ①$$

① で $n=1$ とすると，$a_1=2$ となるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ．

よって，もとの数列の第 n 項は　$\dfrac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2)　階差数列は 1，3，9，27，…… となるから，この数列の第 k 項は　3^{k-1}

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)\quad\cdots\cdots ①$$

① で $n=1$ とすると，$a_1=1$ となるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ．

よって，もとの数列の第 n 項は　$\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

第 10 問【和から一般項を求める１】

初項から第 n 項までの和が次の式で与えられる数列の第 n 項を求めよ．

(1)　n^2-3n　　(2)　n^3+2　　(3)　$2^{n+2}-4$

＜解＞

数列の第 n 項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1)　$S_n=n^2-3n$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=-2$　…… ①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$

よって　$a_n=2n-4$　…… ②

② で $n=1$ とすると，① に一致する．

ゆえに，この数列の第 n 項は　$2n-4$

(2)　$S_n=n^3+2$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=3$　…… ①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}$

よって　$a_n=3n^2-3n+1$　…… ②

② で $n=1$ とすると，$a_1=1$ となり，① と一致しない．

ゆえに，この数列の第 n 項は　$n=1$ のとき　3，　$n \geqq 2$ のとき　$3n^2-3n+1$

(3)　$S_n=2^{n+2}-4$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=4$　…… ①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-4)-(2^{n+1}-4)$

よって　$a_n=2^{n+1}$ …… ②

② で $n=1$ とすると，① に一致する．ゆえに，この数列の第 n 項は　2^{n+1}

第 11 問【和から一般項を求める２】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n(n+1)$ を満たすとき，
和 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ．

＜解＞

$T_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ とおく．

$n\geqq 2$ のとき　　　　$T_n-T_{n-1}=na_n$

$T_n=n(n+1)$ であるから　　$T_n-T_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$

よって，$na_n=2n$ であるから　　$a_n=2$

また，与えられた等式で $n=1$ とすると　　$a_1=2$

ゆえに　　　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=2n$

第 12 問【応用問題１－整式の展開を利用して２数の積の和を作る】

数列 1，2，3，……，n において，次の積の和を求めよ．
(1)　異なる２項の積の和　　　　(2)　互いに隣接しない２項の積の和

＜解＞

(1)　求める和を S とする．

$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots)$

であるから　　$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2S$

よって　　$2S=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$=\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

よって，求める和は　　$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

(2)　(1) より，求める和は

$$\underline{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n\cdot 3(n^2-n-2)=\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

第 13 問【応用問題２－格子点の数】

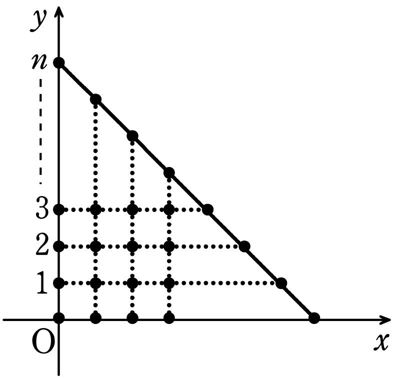
n を正の整数とする．次の図形の周または内部にある格子点の数を求めよ．

(1)　3 点 $(0,\ 0)$，$(n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を頂点とする三角形

(2)　3 直線 $3x+2y=6n$，$x=0$，$y=0$ で囲まれた三角形

＜解＞

(1)　直線 $x=a$ 上の格子点の個数は



$\underline{x=0\ のとき}$

$\underline{\quad y=0,\ 1,\ \cdots,\ n\ で\qquad (n+1)\ 個}$

$\underline{x=1\ のとき}$

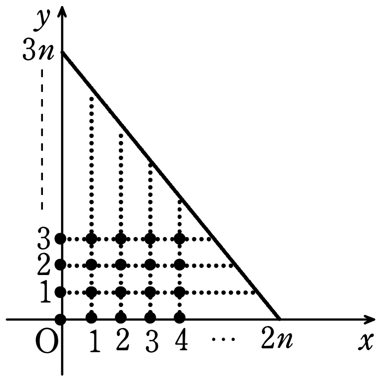
$\underline{\quad y=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\ で\quad n\ 個}$

同様に考えていくと，求める個数は

$$\underline{(n+1)+n+(n-1)+\cdots\cdots+3+2+1}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(2)　k を 1 以上の整数とし，直線 $x=k$ 上の格子点の個数を a_k とする．



$x=2k-1$ のとき

　$y=0,\ 1,\ \cdots,\ 3n-3k+1$ で

　　$a_{2k-1}=3n-3k+2$

$x=2k$ のとき

　$y=0,\ 1,\ \cdots,\ 3n-3k$ で

　　$a_{2k}=3n-3k+1$

直線 $x=0$ 上の格子点の個数は $3n+1$ であるから，

求める格子点の総数は

$$(3n+1)+\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(3n+1)+\sum_{k=1}^{n}(-6k+6n+3)$$

$$=(3n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(6n+3)n$$

$$=3n^2+3n+1$$

別解　4 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ 3n)$，$(0,\ 3n)$ を頂点とする長方形の格子点の個数は

$$(2n+1)(3n+1)=6n^2+5n+1$$

この長方形の対角線 $3x+2y=6n$ 上の格子点の個数は　$n+1$

よって，求める個数は　$\{(6n^2+5n+1)-(n+1)\}\div 2+(n+1)=3n^2+3n+1$

第 14 問【群数列１】

奇数の数列 1，3，5，…… を，第 n 群が n 個の奇数を含むように分ける．第 n 群に含まれる奇数の和を求めよ．

$$\{1\},\ \{3,\ 5\},\ \{7,\ 9,\ 11\},\ \{13,\ 15,\ 17,\ 19\},\ \{21,\ \cdots\cdots\},\ \cdots\cdots$$

＜解＞

第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに属する奇数の個数は

$$1+2+3+\ \cdots\cdots\ +(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

ゆえに，第 n 群の最初の奇数は，もとの数列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項である．

よって，第 n 群の最初の奇数は $\quad 2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=n^2-n+1$

求める和 S は，初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}n\{2(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$$

第 15 問【群数列２】

次の数列において，第 100 項を求めよ．また，$\frac{5}{22}$ は第何項か．

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{2},\ \cdots\cdots$$

＜解＞

与えられた数列を

$$\boxed{\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\right),\ \cdots\cdots}$$

のように群に分けると，第 n 群は n 個の項を含む．

また，第 n 群の m 番目の項は　$\dfrac{m}{n-(m-1)}=\dfrac{m}{n-m+1}$

第 100 項が第 n 群に入るとすると　$\dfrac{1}{2}(n-1)n<100\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1)$

ゆえに　$n(n-1)<200<n(n+1)$　$\cdots\cdots$ ①

$n(n-1)$，$n(n+1)$ は n が大きくなるほど大きくなり，$\sqrt{200}=14.1\cdots\cdots$ に着目して，① に $n=13$，14，15 を代入してみると，① を満たす自然数は $n=14$ のみであることがわかる．

よって，$\dfrac{1}{2}\cdot(14-1)\cdot14+1=92$ より第 14 群の 1 番目の項は第 92 項であるから，

第 100 項は第 14 群の 9 番目の項である．

ゆえに，第 100 項は　$\dfrac{9}{14-9+1}=\dfrac{9}{6}$

また，$\dfrac{5}{22}$ が第 n 群に入るとすると，第 n 群の 5 番目の項であるから

$n-5+1=22$　　ゆえに　$n=26$

このとき，$\dfrac{1}{2}(26-1)\cdot26+5=330$ から，$\dfrac{5}{22}$ は第 330 項である．