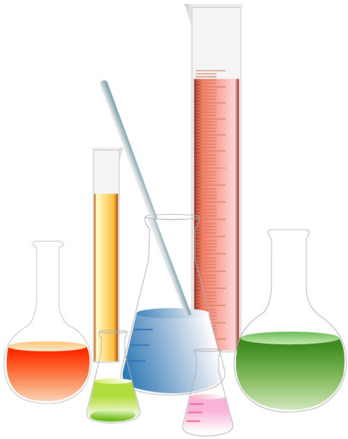
数学的帰納法・漸化式



第 1 問【隣接 2 項間漸化式から第 5 項をよみとってみよう】…P2

第 2 問【等差・等比・階差数列の隣接 2 項間漸化式】…P2

第 3 問【$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq1,\ q\neq0)$ のタイプの漸化式の考え方】…P3

第 4 問【$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq1,\ q\neq0)$ のタイプの漸化式】…P4

第 5 問【$a_{n+1}=pa_n+q^n\ (p\neq1,\ q\neq0)$ のタイプの漸化式】…P5

第 6 問【$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{a_n+q}\ (p\neq1,\ q\neq0)$ のタイプの漸化式】…P6

第 7 問【変形すると $A_{n+1}=A_n$ のタイプの漸化式】…P7

第 8 問【連立漸化式】…P7

第 9 問【隣接 3 項間漸化式】…P8

第 10 問【和と一般項の関係から作る漸化式】…P9

第 11 問【漸化式を作る（有名問題）】…P10

第 12 問【推定して数学的帰納法で示す】…P10

第 13 問【方程式・不等式を数学的帰納法で示す】…P10

第 14 問【数学的帰納法で整数問題を考える】…P12

第 15 問【一昨日帰納法（隣接 3 項間漸化式）】…P13

重要例題集　数学的帰納法・漸化式

第１問【隣接２項間漸化式から第５項をよみとってみよう】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第５項を求めよ.

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=5a_n+1$　　(2)　$a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n-n$

(3)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n$　　(4)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$

＜解＞

(1)　$a_2=5a_1+1=6,\ a_3=5a_2+1=31,\ a_4=5a_3+1=156$

よって　$a_5=5a_4+1=5\cdot156+1=781$

(2)　$a_2=a_1-1=-2,\ a_3=a_2-2=-4,\ a_4=a_3-3=-7$

よって　$a_5=a_4-4=-7-4=-11$

(3)　$a_2=2a_1=8,\ a_3=2a_2=16,\ a_4=2a_3=32$

よって　$a_5=2a_4=2\cdot32=64$

(4)　$a_2=\dfrac{2a_1}{a_1+1}=\dfrac{4}{3},\ a_3=\dfrac{2a_2}{a_2+1}=\dfrac{8}{7},\ a_4=\dfrac{2a_3}{a_3+1}=\dfrac{16}{15}$

よって　$a_5=\dfrac{2a_4}{a_4+1}=\dfrac{2\cdot\dfrac{16}{15}}{\dfrac{16}{15}+1}=\dfrac{32}{31}$

第２問【等差・等比・階差数列の隣接２項間漸化式】

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=3$　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=(-2)a_n$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=2n$　　(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$

＜解＞

(1)　条件より，$\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから

$$a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$$

(2)　条件より，$\{a_n\}$ は初項 1，公比 -2 の等比数列であるから　$a_n=(-2)^{n-1}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　$2n$

したがって，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+(n-1)n$

よって　$a_n=n^2-n+1$

この式は，$n=1$ のときにも成り立つ．

ゆえに　$a_n=n^2-n+1$

(4)　$a_{n+1}-a_n=3^n$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　3^n

したがって，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

この式は，$n=1$ のときにも成り立つ．

ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

第 3 問【$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq 1,\ q\neq 0)$ のタイプの漸化式の考え方】

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-3$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$ を導き，$\{a_n-3\}$ が初項 ア $\boxed{}$，公比 イ $\boxed{}$ の等比数列であることから，a_n を求めよ．

(2)　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ を導き，$\{a_n\}$ の階差数列が初項 ウ $\boxed{}$，公比 エ $\boxed{}$ の等比数列であることから，a_n を求めよ．

＜解＞

(1)　漸化式を変形すると　　$a_{n+1}-3=(2a_n-3)-3$

ゆえに　　$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$

よって，初項は　　(ア)　$a_1-3=1-3=-2$

　　　　公比は　　(イ)　2

ゆえに，数列 $\{a_n-3\}$ の一般項は　　$a_n-3=-2\cdot 2^{n-1}$

よって　　$a_n=-2^n+3$

(2)　$a_{n+1}=2a_n-3$ から　　$a_{n+2}=2a_{n+1}-3$

辺々引くと　　　　　　　　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$a_2=2a_1-3=2\cdot 1-3=-1$ であるから

初項は　(ウ)　$a_2-a_1=-1-1=-2$,　　　　　公比は　(エ)　2

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)\cdot 2^{k-1}=1+\frac{-2(2^{n-1}-1)}{2-1}=-2^n+3 \quad \cdots\cdots ①$$

① で $n=1$ とおくと $a_1=1$ となるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ.

よって　　$a_n=-2^n+3$

第 4 問【$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq 1,\ q\neq 0)$ のタイプの漸化式】

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)　$a_1=2$,　$a_{n+1}=3a_n-2$　　　　(2)　$a_1=1$,　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}+2$

(3)　$a_1=1$,　$a_{n+1}=-2a_n+1$　　　　(4)　$a_1=0$,　$2a_{n+1}-3a_n=1$

＜解＞

(1)　条件から　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　　　また　　$a_1-1=1$

ゆえに，数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 1，公比 3 の等比数列である．

よって　　$a_n-1=1\cdot 3^{n-1}$　　　したがって　　$a_n=3^{n-1}+1$

(2)　条件から　$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$　　　また　　$a_1-3=-2$

ゆえに，数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 -2，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である．

よって　　$a_n-3=-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　　したがって　　$a_n=3-\dfrac{2}{3^{n-1}}$

(3)　条件から　$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$　　　また　　$a_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

ゆえに，数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 -2 の等比数列である．

よって　　$a_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}$　　　したがって　　$a_n=\dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

(4)　条件から　$a_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(a_n+1)$　　　また　　$a_1+1=1$

ゆえに，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 1，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列である．

よって　　$a_n+1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　　　したがって　　$a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

第 5 問【$a_{n+1}=pa_n+q^n$ $(p\neq 1\ ,\ q\neq 0)$ のタイプの漸化式】

$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について (1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ． (2)　$\{b_n\}$ の一般項と $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

<解>

(1) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+1$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと $b_{n+1}=b_n+1$ また $b_1=\dfrac{a_1}{2}=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の漸化式は $b_1=1$，$b_{n+1}=b_n+1$

(2) (1) より，数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公差 1 の等差数列であるから

$$b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=2^n\cdot b_n=2^n\cdot n$

第 6 問【$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{a_n+q}$ $(p\neq 1\ ,\ q\neq 0)$ のタイプの漸化式】

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+3}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

<解>

$a_1>0$ であるから，漸化式より $a_2>0$ したがって $a_3>0$

同様にして，常に $a_n>0$ すなわち $a_n\neq 0$

よって，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{3a_n} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{a_n}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とすると $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}+b_n$ また $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$$

よって，求める一般項 a_n は $a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{3}{n+2}$

第 7 問【変形すると $A_{n+1}=A_n$ のタイプの漸化式】

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=na_n$　　　(2)　$a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$

＜解＞

(1)　漸化式から　$(n+1)a_{n+1}=na_n=(n-1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot a_1$

よって　$na_n=1\cdot a_1=1$　　　したがって　$a_n=\dfrac{1}{n}$

(2)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots\cdots=\dfrac{a_1}{1}$

よって　$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}=1$　　　したがって　$a_n=n$

第 8 問【連立漸化式】

条件 $a_1=2$，$b_1=6$，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=3a_n+4b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 の値を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{3a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　(2) の結果を用いて，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

<解>

(1)　$a_2=2a_1+b_1=10$，$b_2=3a_1+4b_1=30$，$a_3=2a_2+b_2=50$，$b_3=3a_2+4b_2=150$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+b_n$　…… ①，　$b_{n+1}=3a_n+4b_n$　…… ②

　① ＋ ② から　　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

　また　　$a_1+b_1=8$

　ゆえに，$\{a_n+b_n\}$ は初項 8，公比 5 の等比数列である．

　よって　　$a_n+b_n=8\cdot5^{n-1}$　…… ③

　① ×3 − ② から　　$3a_{n+1}-b_{n+1}=3a_n-b_n$

　ゆえに　$3a_n-b_n=3a_1-b_1=0$　　よって　$3a_n-b_n=0$　…… ④

(3)　③ ＋ ④ から　　$4a_n=8\cdot5^{n-1}$　　よって　$a_n=2\cdot5^{n-1}$

　このとき，④ から　$b_n=3a_n=6\cdot5^{n-1}$

第 9 問【隣接 3 項間漸化式】

条件 $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　漸化式が $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ と変形されることを利用して，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

<解>

(1)　$a_2-2a_1=1$ から，漸化式により，数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列である．よって　$a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}$　…… ①

(2)　$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ を変形すると　　$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$

　$a_2-3a_1=1$ から，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列である．

　よって　　$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}$　…… ②

(3)　① − ② から　　$a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$

第 10 問【和と一般項の関係から作る漸化式】

数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和 S_n と a_n の間に，$S_n=2a_n-n$ の関係があるとき，一般項 a_n を求めよ．

＜解＞

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-n)-\{2a_{n-1}-(n-1)\}=2a_n-2a_{n-1}-1$

よって　$a_n=2a_{n-1}+1$

また，$a_1=S_1$ から　$a_1=2a_1-1$　　ゆえに　$a_1=1$

よって，数列 $\{a_n\}$ の漸化式は　$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+1$

$a_n=2a_{n-1}+1$ から　$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$　　また　$a_1+1=2$

ゆえに，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列である．

よって　$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　　したがって　$a_n=2^n-1$

第 11 問【漸化式を作る（有名問題）】

平面上に n 個の円があり，それらのどの 2 つも交わり，また，どの 3 つも 1 点で交わらない．これらの n 個の円が平面を a_n 個の部分に分けるとするとき，a_n を n の式で表せ．

＜解＞

1 個の円は平面を 2 個の部分に分けるから　$a_1=2$

n 個の円が平面を a_n 個の部分に分けている．

$(n+1)$ 個目の円 C_{n+1} をかくと，C_{n+1} は n 個の円と $2n$ 個の点で交わる．
これらの交点で C_{n+1} は $2n$ 個の円弧に分かれ，これが新しい境界になるから，分割された部分は $2n$ 個増加する．

ゆえに　$a_{n+1}=a_n+2n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　$2n$

したがって，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

ゆえに　$a_n=n^2-n+2$　　この式は，$n=1$ のときにも成り立つ．

よって　$a_n=n^2-n+2$

第 12 問【推定して数学的帰納法で示す】

$a_1=-1$, $a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) a_n を推定し，それを数学的帰納法で証明せよ.

＜解＞

(1) $a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$, $a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$

(2) (1) から，$a_n=-2n+1$ ……① と推定できる.

[1] $n=1$ のとき $a_1=-1$ ゆえに，① は成り立つ.

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると $a_k=-2k+1$

$n=k+1$ のとき $a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2$

$=-2k-1=-2(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ.

[1]，[2] により，① はすべての自然数 n について成り立つ.

第 13 問【方程式・不等式を数学的帰納法で示す】

n が自然数のとき，次の等式，不等式を数学的帰納法で証明せよ.

(1) $3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots\cdots+3\cdot4^{n-1}=4^n-1$

(2) $1+10+10^2+\cdots\cdots+10^n=\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$

＜解＞

(1)　$3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots\cdots+3\cdot4^{n-1}=4^n-1$　$\cdots\cdots$ ①

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=3$,　(右辺)$=4^1-1=3$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots\cdots+3\cdot4^{k-1}=4^k-1$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$3+3\cdot4+\cdots\cdots+3\cdot4^{k-1}+3\cdot4^k=4^k-1+3\cdot4^k=4^{k+1}-1$$

ゆえに，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ.

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ.

(2)　$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^n=\dfrac{1}{9}(10^{n+1}-1)$　$\cdots\cdots$ ①

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1+10=11$,　(右辺)$=\dfrac{1}{9}(10^2-1)=11$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^k=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^k+10^{k+1}=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)+10^{k+1}$$
$$=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1+9\cdot10^{k+1})$$
$$=\frac{1}{9}(10^{k+2}-1)$$

ゆえに，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ.

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ.

(3)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$　……①

[1]　$n=1$ のとき　　　(左辺)$=1$,　(右辺)$=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

この両辺に $(k+1)^2$ を加えると

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2$$

ここで

$$\frac{(k+2)^3}{3}-\left\{\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2\right\}=\frac{3k^2+9k+7}{3}-(k^2+2k+1)=k+\frac{4}{3}$$

$k\geqq 1$ であるから　　　$k+\dfrac{4}{3}>0$

ゆえに　　　$\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2<\dfrac{(k+2)^3}{3}$

したがって　　　$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\dfrac{(k+2)^3}{3}$

すなわち，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ.

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ.

第 14 問【数学的帰納法で整数問題を考える】

すべての自然数 n について，$4n^3-n$ は 3 で割り切れることを，数学的帰納法で証明せよ.

＜解＞

$4n^3-n$ は 3 で割り切れる　…… ①

[1]　$n=1$ のとき

$4\cdot1^3-1=3$ は 3 で割り切れる．よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定する．

$n=k+1$ のときを考えると

$$4(k+1)^3-(k+1)=(4k^3-k)+3(4k^2+4k+1)$$

仮定により，$4k^3-k$ は 3 で割り切れるから，$4(k+1)^3-(k+1)$ も 3 で割り切れる．

すなわち，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ．

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ．

第 15 問【一昨日帰納法（隣接３項間漸化式）】

n は自然数とする．2 数 x，y の和，積がともに整数ならば x^n+y^n は整数であることを，数学的帰納法で証明せよ．

＜解＞

$x+y=p$，$xy=q$（p，q は整数の定数）とする．

[1]　$n=1$ のとき　$x+y=p$ であるから，x^n+y^n は整数である．

$n=2$ のとき　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=p^2-2q$ で，整数である．

[2]　$n=k-1$，k（k は自然数，$k\geqq2$）のとき　x^n+y^n は整数であると仮定する．

$$\begin{aligned}x^{k+1}+y^{k+1}&=(x^k+y^k)(x+y)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})\\&=(x^k+y^k)p-q(x^{k-1}+y^{k-1})\end{aligned}$$

x^k+y^k，$x^{k-1}+y^{k-1}$ は整数であるから，$x^{k+1}+y^{k+1}$ も整数である．

[1]，[2] から，すべての自然数 n について x^n+y^n は整数である．