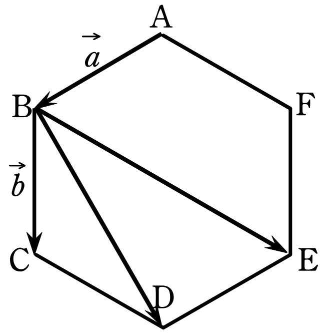
平面ベクトルの基礎

重要例題集　平面ベクトルの基礎

第１問【ベクトルの基本性質１】

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．



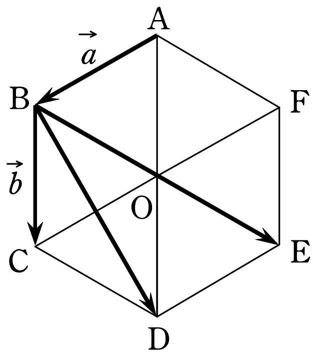
＜解＞

正六角形の３つの対角線 AD，BE，CF の交点を O とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=2\overrightarrow{\mathrm{BO}}=2\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=2\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$
$$=2\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-2\vec{a}+2\vec{b}$$

また　$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}$$
$$=\vec{b}+\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-\vec{a}+2\vec{b}$$

別解　$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}$$
$$=\left(-2\vec{a}+2\vec{b}\right)+\vec{a}=-\vec{a}+2\vec{b}$$

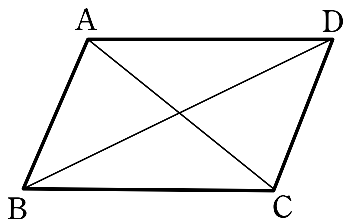


第２問【ベクトルの基本性質２】

右図の平行四辺形の各頂点に関するベクトルのうち，次のベクトルと等しいものを選べ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



＜解＞

(1)　AB∥DC，AB＝DC であるから　　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(2)　BC∥AD，BC＝AD であるから　　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

(3)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　　よって　$\overrightarrow{AC}$

(4)　$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$　　よって　$\overrightarrow{DB}$

(5)　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$

また，(2) より，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ であるから　$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$　　よって　$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DA}$

第 3 問【ベクトルの成分表示 1】

$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ であるとき，次のベクトルを成分を用いて表せ．
また，その大きさを求めよ．

(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-2\vec{a}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(4)　$\vec{b}-\vec{a}$　　(5)　$2\vec{a}-3\vec{b}$　　(6)　$-3\vec{a}+4\vec{b}$

＜解＞

(1)　$3\vec{a}=3(1,\ -2)=(3,\ -6)$，　　$|3\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

(2)　$-2\vec{a}=-2(1,\ -2)=(-2,\ 4)$，　　$|-2\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(3)　$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2)+(-3,\ 2)=(1-3,\ -2+2)=(-2,\ 0)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

(4)　$\vec{b}-\vec{a}=(-3,\ 2)-(1,\ -2)=(-3-1,\ 2+2)=(-4,\ 4)$

$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

(5)　$2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,\ -2)-3(-3,\ 2)=(2,\ -4)-(-9,\ 6)$

$=(2+9,\ -4-6)=(11,\ -10)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{11^2+(-10)^2}=\sqrt{221}$

(6)　$-3\vec{a}+4\vec{b}=-3(1,\ -2)+4(-3,\ 2)=(-3,\ 6)+(-12,\ 8)$

$=(-3-12,\ 6+8)=(-15,\ 14)$

$|-3\vec{a}+4\vec{b}|=\sqrt{(-15)^2+14^2}=\sqrt{421}$

第 4 問【ベクトルの成分表示２】

$\vec{a}=(5,\ 0)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ とする．等式 $2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，成分を用いて表せ．

＜解＞

$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$ …… ②　とおく．

①×2−② から　$3\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b})$ …… ③

ゆえに　$\vec{x}=\frac{1}{3}\{2(5,\ 0)-(-2,\ 3)\}=\frac{1}{3}(10+2,\ 0-3)=(4,\ -1)$

また，①，③ から　$\vec{y}=\vec{a}-2\cdot\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b})$　　よって　$\vec{y}=\frac{1}{3}(-\vec{a}+2\vec{b})$

ゆえに　$\vec{y}=\frac{1}{3}\{-(5,\ 0)+2(-2,\ 3)\}=\frac{1}{3}(-5-4,\ 0+6)=(-3,\ 2)$

第 5 問【ベクトルの成分表示３】

$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ （t は実数）とする．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{15}$ のとき t の値を求めよ．

(2)　$|\vec{c}|$ の 最小値と，そのときの t の値を求めよ．

＜解＞

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3+t,\ 1+2t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(3+t)^2+(1+2t)^2=5t^2+10t+10$

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{15}$ のとき　$|\vec{c}|^2=15$　　よって　$5t^2+10t+10=15$

ゆえに　$t^2+2t-1=0$　　これを解いて　$t=-1\pm\sqrt{2}$

(2)　$|\vec{c}|^2=5(t^2+2t)+10=5(t+1)^2+5$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 5 をとる．

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる．

したがって，$|\vec{c}|$ は $t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$ をとる．

第 6 問【ベクトルの成分表示 4】

4 点 A $(1,\ 2)$，B $(3,\ 5)$，C $(4,\ 8)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD の頂点 D の座標を，ベクトルを利用して求めよ．

＜解＞

D の座標を $(x,\ y)$ とする．

平行四辺形 ABCD について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ が成り立つから　　$(2,\ 3)=(4-x,\ 8-y)$

ゆえに　　$2=4-x,\ 3=8-y$　　よって　　$x=2,\ y=5$

したがって　　D $(2,\ 5)$

第 7 問【単位ベクトルを作る】

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-6,\ 8)$ のとき，次のような単位ベクトルを求めよ． (1)　$\vec{a}$ と同じ向き　　(2)　$\vec{b}$ と反対向き　　(3)　$2\vec{a}-\vec{b}$ と同じ向き

＜解＞

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ であるから　　$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

(2)　$|\vec{b}|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$ であるから　　$-\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{10}(-6,\ 8)=\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

(3)　$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,\ 2)-(-6,\ 8)=(2-(-6),\ 4-8)=(8,\ -4)$

ゆえに　　$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{8^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$

よって　　$\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{|2\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}(8,\ -4)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

第 8 問【内分・外分点と三角形の重心の位置ベクトル】

△ABC において，辺 BC を 3 : 2 の比に内分する点を D，辺 BC を 1 : 2 の比に外分する点を E，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$

＜解＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1-2}=2\vec{b}-\vec{c}$

(3) 辺 BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{GE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(2\vec{b}-\vec{c})-\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{4}{3}\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-\left(\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)=-\dfrac{1}{15}\vec{b}-\dfrac{4}{15}\vec{c}$

第 9 問【ベクトルの内積】

1 辺の長さが 1 である正方形 ABCD において，次の内積を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

＜解＞

(1) $\underline{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 90^\circ}=1\cdot 1\cdot 0=0$

(2) $\underline{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}||\overrightarrow{\mathrm{DA}}|\cos 0^\circ}=1\cdot 1\cdot 1=1$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は　45°

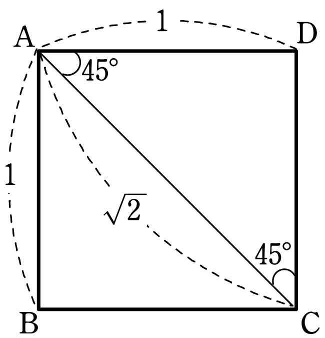
よって　$\underline{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 45^\circ}$

$=1\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角は　$90^\circ+45^\circ=135^\circ$

よって　$\underline{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|\cos 135^\circ}$

$=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$



第 10 問【ベクトルの内積の応用（なす角・2 点の距離・三角形の面積）】

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=2$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3$ とする．

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 θ を求めよ．

(2)　2 点 P, Q 間の距離を求めよ．　(3)　△OPQ の面積を求めよ．

＜解＞

(1)　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}=\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=30^\circ$

(2)　$\mathrm{PQ}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=(\sqrt{3})^2-2\cdot3+2^2=1$

よって　$\mathrm{PQ}=1$

(3)　求める面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第 11 問【ベクトルの平行条件・直交条件】

$\vec{a}=(4,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$, $\vec{x}=(p,\ q)$ とする．$\vec{x}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ は平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるとき，p と q の値を求めよ．

＜解＞

$\vec{b}-\vec{a}=(3-4,\ -1-2)=(-1,\ -3)$,　$\vec{x}-\vec{b}=(p-3,\ q+1)$

$\vec{x}/\!/(\vec{b}-\vec{a})$ であるから　$p\cdot(-3)-q\cdot(-1)=0$　よって　$-3p+q=0$ ……①

$(\vec{x}-\vec{b})\perp\vec{a}$ であるから　$(p-3)\cdot4+(q+1)\cdot2=0$　よって　$2p+q=5$ ……②

①，② を解いて　$p=1$, $q=3$

第 12 問【$\left|s\vec{a}+t\vec{b}\right|$を考える（余弦定理）】

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=17$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ と $|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ．

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ．

(3)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$ で，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ．

＜解＞

(1)
$$\underline{|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$$
$$=\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)+2\vec{a}\cdot\vec{b}=17+2\cdot4=25$$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|=5$

また
$$\underline{|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$$
$$=\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)-2\vec{a}\cdot\vec{b}=17-2\cdot4=9$$

よって　$|\vec{a}-\vec{b}|=3$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ から　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$　よって　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

これに $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$ を代入して　$3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=13$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

よって　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-2\cdot\dfrac{3}{2}+1^2=7$

したがって　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=4\cdot5\cdot\dfrac{1}{2}=10$

よって
$$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$$
$$=4\cdot4^2-12\cdot10+9\cdot5^2=169$$

ゆえに　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=13$

第 13 問【内積の応用】

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-2$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ のとき

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の大きさを求めよ.　　　(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.

＜解＞

(1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ から　$\vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$

よって　$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(-\vec{b}-\vec{c})=-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=2+2=4$

ゆえに　$|\vec{a}|=2$

同様に　$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{c})=2+2=4$,　$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=2+2=4$

よって　$|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=2$

(2) (1) から　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{2\cdot2}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$