ベクトルと平面図形

重要例題集　平面ベクトルの基礎

第 1 問【ベクトルと三角形の面積】

3 点 A$(0,\ -1)$，B$(2,\ 5)$，C$(-1,\ 1)$ を頂点する三角形 ABC の面積を求めよ

＜解＞

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 6)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 2)$ であるから

$$|\overrightarrow{AB}|^2=2^2+6^2=40,\qquad |\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+2^2=5,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-1)+6\cdot2=10$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{40\cdot5-10^2}=\frac{1}{2}\cdot10=5$$

第 2 問【位置ベクトルの軌跡 1】

△ABC と点 P に対して，次の等式が成り立つとき，点 P の位置をいえ.

(1)　$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}$　　(2)　$3\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AC}$　　(3)　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}$

＜解＞

点 A，B，C，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とする.

(1)　等式から　$2(\vec{p}-\vec{b})=\vec{c}-\vec{b}$　　ゆえに　$\vec{p}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

　したがって，P は辺 BC の中点である.

(2)　等式から　$3(\vec{a}-\vec{p})=2(\vec{c}-\vec{a})$　　ゆえに　$\vec{p}=\dfrac{-5\vec{a}+2\vec{c}}{-3}=\dfrac{-5\vec{a}+2\vec{c}}{2-5}$

　したがって，P は辺 AC を 2 : 5 の比に外分する点である.

(3)　等式から　$(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})=\vec{c}-\vec{a}$　　ゆえに　$\vec{p}=\vec{a}$

　したがって，P は A と一致する.

第 3 問【直線のベクトル方程式】

点 $(2,\ -3)$ を通り，$\vec{d}=(2,\ -6)$ に平行な直線と垂直な直線の方程式を求め，$ax+by+c=0$ の形で答えよ．

＜解＞

求める直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，$\mathrm{A}(2,\ -3)$ とする．

A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の方程式は

$(x,\ y)=(2,\ -3)+t(2,\ -6)$　　ただし，t は媒介変数

よって　　$x=2+2t,\ y=-3-6t$　　　t を消去すると　　$3x+y-3=0$

A を通り，$\vec{d}$ に垂直な直線については，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{d}$ から　　$\vec{d}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y+3)$ であるから，① より　　$2\times(x-2)+(-6)\times(y+3)=0$

よって　　$x-3y-11=0$

第 4 問【2 直線のなす角と直線の法線ベクトル】

次の 2 直線のなす鋭角 α を求めよ．

(1)　$\sqrt{3}\,x+y+1=0,\ x+\sqrt{3}\,y+1=0$　　　(2)　$2x-4y-1=0,\ x+3y-2=0$

＜解＞

(1)　2 直線の法線ベクトルを，順に $\vec{m},\ \vec{n}$ とし，ベクトル $\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とする．

$\vec{m}=(\sqrt{3},\ 1),\ \vec{n}=(1,\ \sqrt{3})$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}\times1+1\times\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=30^\circ$　　　したがって　　$\alpha=30^\circ$

(2)　2 直線の法線ベクトルを，順に $\vec{m},\ \vec{n}$ とし，ベクトル $\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とする．

$\vec{m}=(2,\ -4),\ \vec{n}=(1,\ 3)$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2\times1+(-4)\times3}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$=\frac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=135^\circ$

また，$0^\circ<\alpha<90^\circ$ であるから　　$\alpha=180^\circ-\theta=45^\circ$

第 5 問【位置ベクトルの軌跡 2 －直線のベクトル方程式】

O $(0,\ 0)$，A $(2,\ 0)$，B $(1,\ 2)$ とする．実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の終点 P の存在範囲を図示せよ．

(1)　$0\leqq s\leqq 1$，$1\leqq t\leqq 3$　　　(2)　$1\leqq s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3)　$2s+t=1$　　　(4)　$3s+2t=6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

＜解＞

(1)　t を固定して $t=k$ (定数) とすると　　$1\leqq k\leqq 3$

$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

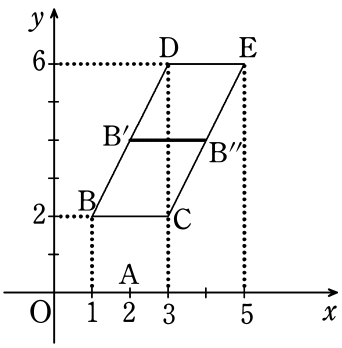
よって　　$\overrightarrow{\mathrm{B'P}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2s,\ 0)$

$0\leqq s\leqq 1$ で s が変化すると，P は右図のような

$\mathrm{B'B''}=2$，$\mathrm{B'B''}\,/\!/\,\mathrm{OA}$

である線分 B′B″ 上を動く．

更に，k を $1\leqq k\leqq 3$ で変化させると，線分 B′B″ が図の線分 BC から線分 DE まで，x 軸に平行に動く．



よって，P の存在範囲は〔図〕の斜線部分．ただし，境界線上の点を含む．

(2)　$s+t=k$ (定数) とおくと　　$1\leqq k\leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

また　　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq 0$，$\dfrac{t}{k}\geqq 0$

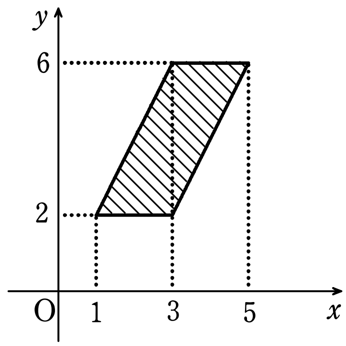
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，P は線分 A′B′ 上を動く．

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とする．このとき，C $(6,\ 0)$，D $(3,\ 6)$ である．

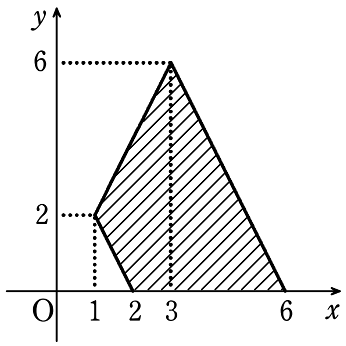
k を $1\leqq k\leqq 3$ で変化させると，A′ は A から C まで動き，B′ は B から D まで動き，$\mathrm{A'B'}\,/\!/\,\mathrm{AB}$，$\mathrm{A'B'}\,/\!/\,\mathrm{CD}$ である．

よって，P の存在範囲は〔図〕の斜線部分．ただし， 境界線上の点を含まない．

(1)



(2)



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　また　$2s+t=1$

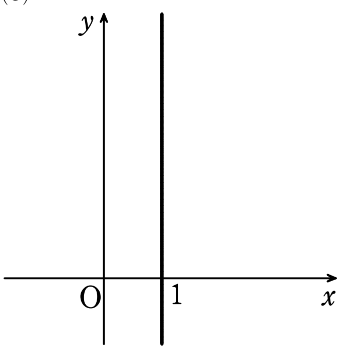
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，C(1, 0) であり，P は直線 CB 上を動く．〔図〕

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{1}{3}t(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

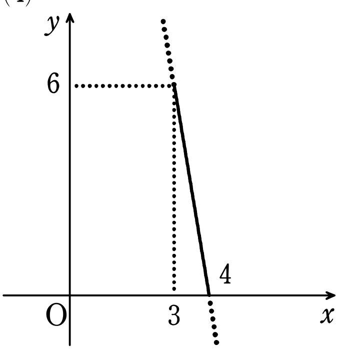
また　$\frac{1}{2}s+\frac{1}{3}t=\frac{3s+2t}{6}=1$, $\frac{1}{2}s\geqq 0$, $\frac{1}{3}t\geqq 0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，C(4, 0)，D(3, 6) であり，P は線分 CD 上を動く．〔図〕

(3)



(4)



第 6 問【位置ベクトルの軌跡 3 －内積と軌跡】

原点 O と異なる定点 A に対して，動点 P がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ が次の条件を満たすとき，P はどのような図形を描くか．

(1) $|\vec{p}+\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{a}|$　　　(2) $2\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|$

＜解＞

(1) $|\vec{p}+\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ のとき　$|\vec{p}+\vec{a}|^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

ゆえに　$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ のとき　P は O と一致する．

したがって，P が描く図形は O を通り，OA に垂直な直線である．

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\vec{a}$ とすると線分 AA′ の中点は O である．条件から，P は 2 点 A，A′ から等距離にあるように動く．よって，P の軌跡は線分 AA′ の垂直二等分線，すなわち O を通り OA に垂直な直線である．

(2)　$\vec{p}\fallingdotseq\vec{0}$ のとき，$\vec{p}$ と $\vec{a}$ のなす角を θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$) とすると，$2\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|$ から

$$2|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{p}|$$

$|\vec{a}|\fallingdotseq0$，$|\vec{p}|\fallingdotseq0$ であるから　　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　　　よって　　$\theta=60°$

$\vec{p}=\vec{0}$ のとき，P と O は一致する．

したがって，P が描く図形は，O を端点とし，半直線 OA と 60° の角をなす 2 本の半直線である．

第 7 問【円のベクトル方程式１】

平面上に △ABC と動点 P がある．P が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

(1)　$2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$　　　　(2)　$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$

＜解＞

(1)　$2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ から　　$2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}-3\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$

よって　　$\overrightarrow{PA}\cdot(2\overrightarrow{PB}-3\overrightarrow{PC})=0$　　　ゆえに　　$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\dfrac{-2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}}{3-2}\right)=0$

よって，辺 BC を 3 : 2 の比に外分する点を D とすると　　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=0$

したがって，PA⊥PD であるから，P の軌跡は線分 AD を直径とする円である．

(2)　A，B，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とする．

$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$ から　　$|\overrightarrow{AP}|^2=4|\overrightarrow{BP}|^2$

すなわち　　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=4|\vec{p}-\vec{b}|^2$

ゆえに　　$|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=4(|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

よって　　$3|\vec{p}|^2+(2\vec{a}-8\vec{b})\cdot\vec{p}-|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=0$

すなわち　　$3|\vec{p}|^2+(2\vec{a}-8\vec{b})\cdot\vec{p}-(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$

ゆえに　　$\{3\vec{p}-(\vec{a}+2\vec{b})\}\cdot\{\vec{p}+(\vec{a}-2\vec{b})\}=0$

よって　　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}\right)\cdot\left(\vec{p}-\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}\right)=0$

したがって，辺 AB を 2 : 1 の比に内分する点，外分する点を，それぞれ E，F とすると　　$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FP}=0$

よって，EP⊥FP であるから，P の軌跡は線分 EF を直径とする円である．

第 8 問【円のベクトル方程式２】

3 点 A (1, 0), B (0, 1), C (2, 2) に対して，点 P が $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3$ を満たしながら動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

＜解＞

3 点 A，B，C は同一直線上にないから，図形 ABC は三角形になる．

△ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=3\overrightarrow{\mathrm{PG}}$

ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3$ から　$3\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|=3$　よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|=1$

したがって，P は G を中心とする半径 1 の円周上を動く．

ここで，G の座標は　$\left(\dfrac{1+0+2}{3},\ \dfrac{0+1+2}{3}\right)$　すなわち　(1, 1)

よって，P の軌跡は点 (1, 1) を中心とする半径 1 の円である．

第 9 問【3 点が同一直線にある条件（共線条件）】

△ABC の重心を G，辺 AB を 1 : 4 の比に内分する点を D，辺 BC を 4 : 3 の比に内分する点を E とする．3 点 D，E，G は同じ直線上にあることを証明せよ．

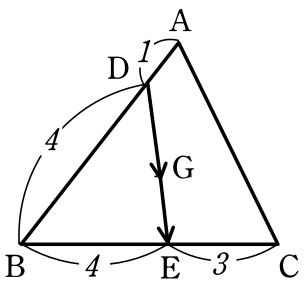
＜解＞

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると，条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{5}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7},\quad \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7}-\dfrac{1}{5}\vec{b}=\dfrac{4}{35}(2\vec{b}+5\vec{c})$

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{1}{5}\vec{b}=\frac{1}{15}(2\vec{b}+5\vec{c})$$



ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$　したがって，3 点 D，E，G は同じ直線上にある．

第 10 問【ベクトル方程式から図形を考える 1】

△ABC と点 P に対して，$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立つものとする．

(1)　点 P の位置をいえ．　　(2)　△PBC : △PCA : △PAB を求めよ．

＜解＞

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とする．

等式から　$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$

よって　$5\vec{p}+4(\vec{p}-\vec{b})+3(\vec{p}-\vec{c})=\vec{0}$

ゆえに　$\vec{p}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{12}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{7}=\dfrac{7}{7+5}\cdot\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{3+4}$

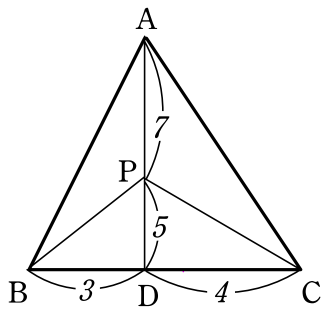
したがって，辺 BC を 3 : 4 の比に内分する点をD とすると，P は線分 AD を 7 : 5 の比に内分する点である．

(2)　△ABC の面積を S とすると

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{5}{12}S$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{7}{12}\triangle\mathrm{ADC}=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{7}S=\frac{1}{3}S$$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{7}{12}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{7}S=\frac{1}{4}S$$



したがって

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{12}S:\frac{1}{3}S:\frac{1}{4}S=5:4:3$$

第 11 問【ベクトル方程式から図形を考える 2】

△ABC と実数 k に対して，点 P は $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす．

このとき，点 P が △ABC の内部にあるように k の値の範囲を定めよ．

＜解＞

$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から

$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=k(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k+2}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1-k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

P が △ABC の内部にあるから

$$\boxed{\frac{k+2}{6}>0,\quad \frac{1-k}{6}>0,\quad \frac{k+2}{6}+\frac{1-k}{6}<1}$$

第 1 式から　$k>-2$　　第 2 式から　$k<1$　　第 3 式は常に成り立つ.

ゆえに，求める k の値の範囲は　$-2<k<1$

第 12 問【三角形の重心・垂心の位置ベクトル 1】

△ABC の外心を O，重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする.

(1)　H は △ABC の垂心であることを証明せよ.

(2)　3 点 O，G，H はこの順に一直線上にあることを証明せよ.

＜解＞

(1)　O は外心であるから　　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$

これと $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$ であるから　$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\neq\vec{0}$ であるから　$\mathrm{BH}\perp\mathrm{CA}$

したがって，H は △ABC の垂心である.

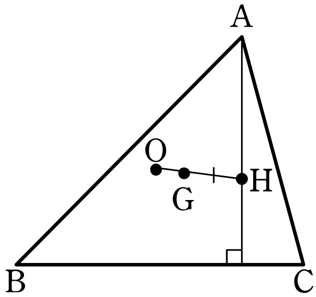
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

3＞1 であるから，3 点 O，G，H はこの順に一直線上にある.

第 13 問【三角形の外心・重心の位置ベクトル２】

△ABC の外心を O，重心を G とし，線分 OG の G を越える延長上に点 H をとり，OH＝3OG とする．AH⊥BC であることを証明せよ．

＜解＞



$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする．

O は △ABC の外心であるから　　OA＝OB＝OC

よって　　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

また，G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

更に，OH＝3OG であるから

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$$

よって　　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=0$

$\vec{b}+\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{c}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　　$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$　　すなわち　　AH⊥BC

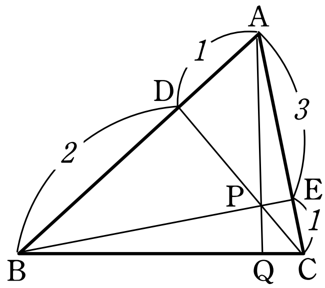
第 14 問【図形への応用１－交点の位置ベクトル＜１＞】

△ABC において，辺 AB を 1 : 2 の比に内分する点を D，辺 AC を 3 : 1 の比に内分する点を E とする．また，2 つの線分 CD と BE の交点を P とし，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする．次の比を求めよ．

(1)　CP : PD

(2)　BP : PE

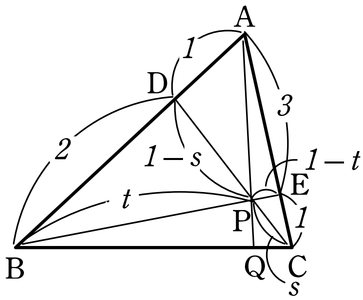
(3)　AP : PQ



＜解＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする.

CP : PD $=s:(1-s)$, BP : PE $=t:(1-t)$ とおくと



$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(1-s)\vec{c}+\frac{s}{3}\vec{b}\ \cdots\cdots ①\end{aligned}}$$

また

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=(1-t)\vec{b}+\frac{3}{4}t\vec{c}\ \cdots\cdots ②\end{aligned}}$$

$\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから，① と ② を比べて　$\frac{s}{3}=1-t$, $1-s=\frac{3}{4}t$

これを解いて　$s=\frac{1}{3}$, $t=\frac{8}{9}$

よって，② から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(1-\frac{8}{9}\right)\vec{b}+\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\vec{c}=\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$ …… ③

(1)　CP : PD $=s:(1-s)=1:2$　　(2)　BP : PE $=t:(1-t)=8:1$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (k は実数) とすると，③ から　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{9}k\vec{b}+\frac{2}{3}k\vec{c}$

Q は辺 BC 上にあるから　$\frac{1}{9}k+\frac{2}{3}k=1$　　よって　$k=\frac{9}{7}$

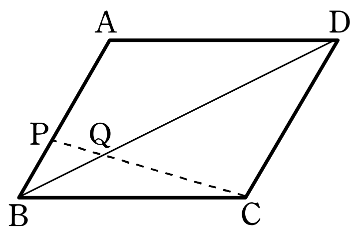
ゆえに，AP : AQ $=7:9$ であるから　AP : PQ $=7:(9-7)=7:2$

第 15 問【図形への応用 2 －共線条件】

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 2 : 1 の比に内分する点を P，対角線 BD を 1 : 3 の比に内分する点を Q とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とする．

(1)　3 点 P，Q，C は同一直線上にあることを示せ．

(2)　PQ : QC を求めよ．



＜解＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c})$

よって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c})-\dfrac{1}{3}\vec{a}=-\dfrac{1}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{c}-\dfrac{1}{3}\vec{a}=4\left(\dfrac{1}{4}\vec{c}-\dfrac{1}{12}\vec{a}\right)$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ ……①

したがって，3点P，Q，Cは一直線上にある.

(2) ①から $\mathrm{PQ}:\mathrm{PC}=1:4$ よって $\mathrm{PQ}:\mathrm{QC}=1:3$

第16問【図形への応用3－直交条件】

OA＝6，OB＝4，∠AOB＝60°である△OABにおいて，頂点Aから辺OBに垂線AC，頂点Bから辺OAに垂線BDを下ろす.

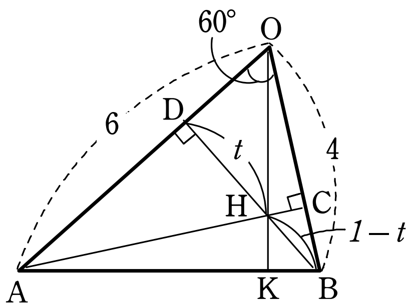
(1) 線分ACと線分BDの交点をHとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ.

(2) 直線OHとABの交点をKとするとき，OH：HKを求めよ.

＜解＞

(1) $\mathrm{OC}=\mathrm{OA}\cos 60^\circ=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$

$\mathrm{OD}=\mathrm{OB}\cos 60^\circ=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$



よって，DH : HB$=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{1-t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{3}t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

H は AC 上にあるから $\dfrac{1-t}{3}+\dfrac{4}{3}t=1$ ゆえに $t=\dfrac{2}{3}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) とおく．

このとき $|\vec{a}|=\mathrm{OA}=6$，$|\vec{b}|=\mathrm{OB}=4$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=12$$

AH⊥OB であるから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

よって $(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$ すなわち $(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

これに $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，$|\vec{b}|=4$ を代入して整理すると $3s+4t=3$ …… ①

また，BH⊥OA であるから $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

よって $(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ すなわち $s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これに $|\vec{a}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ を代入して整理すると $3s+t=1$ …… ②

①，② を解いて $s=\dfrac{1}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ (k は実数) とすると，(1) から

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

K は AB 上にあるから $\dfrac{1}{9}k+\dfrac{2}{3}k=1$ よって $k=\dfrac{9}{7}$

ゆえに，OH : OK$=7:9$ であるから OH : HK$=7:(9-7)=7:2$