空間ベクトル

重要例題集　空間ベクトル

第 1 問【位置ベクトル】

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}$ とする．辺 AB，CD の中点を，それぞれ E，F とし，△ABC，△ABD の重心を，それぞれ G，H とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$

＜解＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}-\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{3}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

第 2 問【空間ベクトルの成分表示】

$\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，次のベクトルを成分を用いて表せ．また，その大きさを求めよ．

(1) $2\vec{a}$　(2) $3\vec{b}$　(3) $-\vec{a}$　(4) $-4\vec{b}$　(5) $\vec{a}+\vec{b}$

(6) $\vec{b}-\vec{a}$　(7) $2\vec{a}+3\vec{b}$　(8) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$　(9) $-2\vec{a}-(\vec{c}-4\vec{b})$

＜解＞

(1) $2\vec{a}=2(1,\ -1,\ 2)=(2,\ -2,\ 4)$, $|2\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+4^2}=2\sqrt{6}$

(2) $3\vec{b}=3(0,\ 2,\ 1)=(0,\ 6,\ 3)$, $|3\vec{b}|=\sqrt{0^2+6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

(3) $-\vec{a}=-(1,\ -1,\ 2)=(-1,\ 1,\ -2)$, $|-\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

(4) $-4\vec{b}=-4(0,\ 2,\ 1)=(0,\ -8,\ -4)$, $|-4\vec{b}|=\sqrt{0^2+(-8)^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$

(5) $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -1,\ 2)+(0,\ 2,\ 1)=(1,\ 1,\ 3)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}$

(6) $\vec{b}-\vec{a}=(0,\ 2,\ 1)-(1,\ -1,\ 2)=(-1,\ 3,\ -1)$

$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$

(7) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ -1,\ 2)+3(0,\ 2,\ 1)=(2,\ -2,\ 4)+(0,\ 6,\ 3)=(2,\ 4,\ 7)$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{2^2+4^2+7^2}=\sqrt{69}$

(8) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1,\ 2)-3(0,\ 2,\ 1)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(2,\ -2,\ 4)-(0,\ 6,\ 3)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(4,\ -9,\ -1)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-9)^2+(-1)^2}=7\sqrt{2}$

(9) $-2\vec{a}-(\vec{c}-4\vec{b})=-2\vec{a}-\vec{c}+4\vec{b}$

$=-2(1,\ -1,\ 2)-(2,\ -1,\ -2)+4(0,\ 2,\ 1)$

$=(-2,\ 2,\ -4)-(2,\ -1,\ -2)+(0,\ 8,\ 4)$

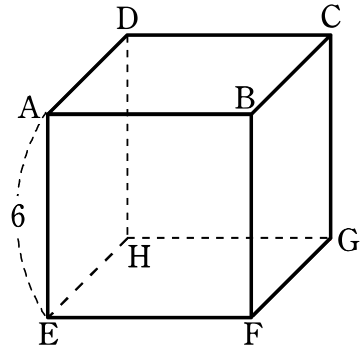
$=(-4,\ 11,\ 2)$

$|-2\vec{a}-(\vec{c}-4\vec{b})|=\sqrt{(-4)^2+11^2+2^2}=\sqrt{141}$

第３問【空間ベクトルの内積】

右の図は，１辺の長さが６の立方体である．次の内積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FB}$ (3) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GD}$



＜解＞

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$

(2)　平面 ABCD と BF は垂直であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{FB}}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FB}} = 0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$ のなす角は　　135°

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GD}} = |\overrightarrow{\mathrm{AE}}||\overrightarrow{\mathrm{GD}}|\cos 135^\circ$

$$= 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -36$$

第 4 問【空間ベクトル－成分表示と内積】

次の成分をもつ 2 つのベクトルの内積と，それらのなす角を求めよ.

(1)　(2，2，1)，(4，4，2)　　(2)　(3，5，2)，(−3，1，2)

(3)　(2，1，3)，(−4，−2，−6)　　(4)　(1，−1，1)，(1，$\sqrt{6}$，−1)

＜解＞

2 つのベクトルを順に $\vec{a}$，$\vec{b}$ とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) とする.

(1)　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 18$,　$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$,

$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$

よって　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{18}{3 \cdot 6} = 1$　　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta = 0^\circ$

(2)　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0$

よって　$\vec{a} \perp \vec{b}$　　ゆえに　$\theta = 90^\circ$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-4)+1\cdot(-2)+3\cdot(-6)=-28,$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14},\quad |\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{14}$

よって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-28}{\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから $\theta=180°$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+(-1)\cdot\sqrt{6}+1\cdot(-1)=-\sqrt{6}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3},\quad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}=2\sqrt{2}$

よって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから $\theta=120°$

第 5 問【共面条件（成分表示)】

次の 4 点が同一平面上にあるように，x，z の値を定めよ．

(1) O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(-1,\ 3,\ -2)$，C$(x,\ 12,\ 5)$

(2) A$(3,\ 1,\ 2)$，B$(4,\ 2,\ 3)$，C$(5,\ 2,\ 5)$，D$(-2,\ -1,\ z)$

＜解＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 3,\ -2)$ であるから，3 点 O，A，B は一直線上にない．ゆえに，点 C が平面 OAB 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 s，t が存在する．

よって $(x,\ 12,\ 5)=s(1,\ 2,\ 3)+t(-1,\ 3,\ -2)$

$=(s-t,\ 2s+3t,\ 3s-2t)$

ゆえに $x=s-t$，$12=2s+3t$，$5=3s-2t$

第 2 式と第 3 式から $s=3$，$t=2$ よって，第 1 式から $x=1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 1,\ 3)$ であるから，3 点 A，B，C は一直線上にない．ゆえに，点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t が存在する．

よって $(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$

$=(s+2t,\ s+t,\ s+3t)$

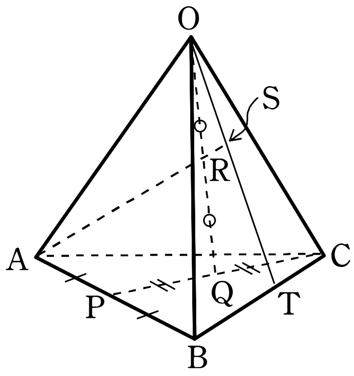
ゆえに $-5=s+2t$，$-2=s+t$，$z-2=s+3t$

第 1 式と第 2 式から $s=1$，$t=-3$ よって，第 3 式から $z=-6$

第 6 問【空間ベクトルと図形 1】

四面体 OABC において，辺 AB の中点を P，線分 PC の中点を Q，線分 OQ の中点を R とする．直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とし，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．BT : TC を求めよ．

＜解＞



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{8}$$

S は直線 AR 上にあるから，s を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

と表される．

よって $$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-s)\vec{a}+s\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{8}=\left(1-\frac{7s}{8}\right)\vec{a}+\frac{s}{8}\vec{b}+\frac{s}{4}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ (k は実数) とおくと $$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\left(1-\frac{7s}{8}\right)\vec{a}+\frac{ks}{8}\vec{b}+\frac{ks}{4}\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$

T は直線 BC 上にあるから，t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots\cdots ②$

と表される．

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は同一平面上にないから，① と ② を比べて

$$k\left(1-\frac{7s}{8}\right)=0\quad\cdots\cdots ③,\qquad \frac{ks}{8}=1-t\quad\cdots\cdots ④,\qquad \frac{ks}{4}=t\quad\cdots\cdots ⑤$$

明らかに $k\neq 0$ であるから，③ より $1-\frac{7s}{8}=0$ よって $s=\frac{8}{7}$

このとき，④，⑤ から $k=\frac{7}{3}$, $t=\frac{2}{3}$

ゆえに $\mathrm{BT}:\mathrm{TC}=t:(1-t)=2:1$

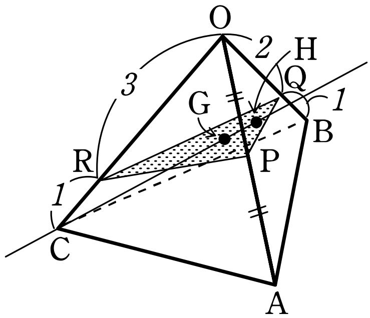
第 7 問【空間ベクトルと図形 2】

四面体 OABC の辺 OA，OB，OC を，それぞれ 1 : 1，2 : 1，3 : 1 の比に内分する点を，順に P，Q，R とする．点 C と △PQR の重心 G を通る直線が平面 OAB と交わる点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

＜解＞

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3}{4}\vec{c}$$



よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=k\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ (k は実数) とおくと $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\vec{c}+k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}-\vec{c}\right)$

$$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{2k}{9}\vec{b}+\left(1-\frac{3k}{4}\right)\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$

また，H は平面 OAB 上にあるから，s，t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 　すなわち　 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots\cdots ②$

と表される．

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{c}\fallingdotseq\vec{0}$ であり，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にないから，① と ② を比べて

$$\frac{k}{6}=s,\quad \frac{2k}{9}=t,\quad 1-\frac{3k}{4}=0$$

これを解いて $\quad k=\frac{4}{3},\quad s=\frac{2}{9},\quad t=\frac{8}{27}$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{8}{27}\vec{b}$

第 8 問【空間ベクトルと図形 3】

3 点 A(1, -2, 3), B(-1, 2, 3), C(1, 2, -3) が定める平面 α に，原点 O から垂線 OH を下ろす．線分 OH の長さを求めよ．また，四面体 OABC の体積を求めよ．

＜解＞

H は平面 α 上すなわち，平面 ABC 上にあるから，s，t を実数として

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots ①$$

と表される．① を変形して

$$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

よって　$\overrightarrow{OH}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=(1-s-t)(1,\ -2,\ 3)+s(-1,\ 2,\ 3)+t(1,\ 2,\ -3)$

$=(-2s+1,\ 4s+4t-2,\ -6t+3)$

OH$\perp\alpha$ であるから，$\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直である．

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0, \quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ここで，$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ 4,\ -6)$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から

$$-2(-2s+1)+4(4s+4t-2)+0\cdot(-6t+3)=0$$

よって　$10s+8t=5 \quad \cdots\cdots ②$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$0\cdot(-2s+1)+4(4s+4t-2)-6(-6t+3)=0$

よって　$8s+26t=13 \quad \cdots\cdots ③$

②，③ から　$s=\dfrac{13}{98}, \quad t=\dfrac{45}{98}$

このとき　$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{18}{49},\ \dfrac{12}{49}\right)$

ゆえに　$OH=|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\left(\dfrac{36}{49}\right)^2+\left(\dfrac{18}{49}\right)^2+\left(\dfrac{12}{49}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6^2(6^2+3^2+2^2)}}{49}=\dfrac{42}{49}=\dfrac{6}{7}$

四面体 OABC の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH=\dfrac{2}{7}\triangle ABC$

ここで　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$，

$|\overrightarrow{AB}|^2=(-2)^2+4^2+0^2=20, \quad |\overrightarrow{AC}|^2=0^2+4^2+(-6)^2=52,$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\cdot0+4\cdot4+0\cdot(-6)=16$

であるから　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{20\cdot52-16^2}=14$

したがって　$V=\dfrac{2}{7}\cdot14=4$

第 9 問【位置ベクトルの軌跡】

四面体 OABC がある．実数 r，s，t が次の条件を満たすとき，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の終点 P の存在範囲をいえ．

(1) $r+s+t=\dfrac{1}{3}$，$r\geqq 0$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　(2) $r+s+t<1$，$r>0$，$s>0$，$t>0$

＜解＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3r\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+3s\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+3t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$3r=r'$，$3s=s'$，$3t=t'$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC'}},\quad r'+s'+t'=1,\ r'\geqq 0,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

ここで，$r'=1-s'-t'$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+s'(\overrightarrow{\mathrm{OB'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}})+t'(\overrightarrow{\mathrm{OC'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s'\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=s'\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$，　$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$，$0\leqq s'+t'\leqq 1$

したがって，P の存在範囲は △A′B′C′ の周および内部である．

(2) $r+s+t=k$ とおくと　$0<k<1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{r}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

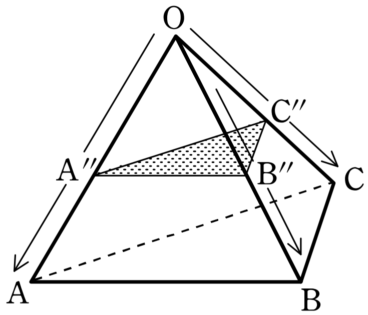
また　$\dfrac{r}{k}+\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=\dfrac{1}{k}(r+s+t)=1$，　$\dfrac{r}{k}>0$，$\dfrac{s}{k}>0$，$\dfrac{t}{k}>0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

とすると，(1) と同様に考えて，P は △A″B″C″ の内部を動く．

k を $0<k<1$ で変化させると，A″，B″，C″は それぞれ，線分 OA，OB，OC(ただし，端点 O，A，B，C を除く) 上を動き，平面A″B″C″ は平面 ABC に平行である．

ゆえに，P の存在範囲は四面体 OABC の内部である．



第 10 問【直線のベクトル方程式１】

次の 2 点 A，B を通る直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ.
(1)　A$(-2,\ 1,\ -1)$，B$(1,\ 3,\ 2)$　　　　(2)　A$(0,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ 2,\ -1)$

＜解＞

原点を O，直線上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると，題意の直線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\quad (t\text{ は実数})$$

(1)　$(x,\ y,\ z)=(-2,\ 1,\ -1)+t(1-(-2),\ 3-1,\ 2-(-1))$

$=(-2+3t,\ 1+2t,\ -1+3t)$

よって　$x=-2+3t,\ y=1+2t,\ z=-1+3t$

(2)　$(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 2)+t(1-0,\ 2-1,\ -1-2)=(t,\ 1+t,\ 2-3t)$

よって　$x=t,\ y=1+t,\ z=2-3t$

第 11 問【直線のベクトル方程式２】

2 点 A$(2,\ 1,\ -3)$，B$(0,\ 2,\ 1)$ を通る直線と，次の平面との交点の座標を，ベクトル方程式を用いて求めよ.
(1)　xy 平面　　(2)　yz 平面　　(3)　zx 平面

＜解＞

原点を O とする．A，B を通る直線上の任意の点を P とすると，この直線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad (t\text{ は実数})$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(2,\ 1,\ -3)+t(0,\ 2,\ 1)=(-2t+2,\ t+1,\ 4t-3)$

(1)　P が xy 平面上にあるとき　$4t-3=0$　　ゆえに　$t=\dfrac{3}{4}$

よって，求める交点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4},\ 0\right)$

(2)　P が yz 平面上にあるとき　$-2t+2=0$　　ゆえに　$t=1$

よって，求める交点の座標は　$(0,\ 2,\ 1)$

(3)　P が zx 平面上にあるとき　$t+1=0$　　ゆえに　$t=-1$

よって，求める交点の座標は　$(4,\ 0,\ -7)$

第 12 問【2 直線のなす角】

次の 2 直線のなす角 θ を求めよ．ただし，s，t は媒介変数，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする．

$$l : (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 3) + s(3,\ 4,\ 5)$$
$$m : (x,\ y,\ z) = (2,\ 3,\ 1) + t(1,\ -7,\ -10)$$

＜解＞

$\vec{d_1} = (3,\ 4,\ 5)$，$\vec{d_2} = (1,\ -7,\ -10)$ とすると，$\vec{d_1}$，$\vec{d_2}$ はそれぞれ，直線 l，m の方向ベクトルである．　$\vec{d_1}$ と $\vec{d_2}$ のなす角を α $(0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|} = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-7) + 5 \cdot (-10)}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{1^2+(-7)^2+(-10)^2}}$$
$$= \frac{-75}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$\alpha = 150^\circ$

ゆえに，2 直線のなす角 θ は　　$\theta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

第 13 問【点と直線の距離（空間）】

点 P$(3,\ -1,\ 4)$ から，2 点 A$(0,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 4,\ 7)$ を通る直線に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．また，線分 PH の長さを求めよ．

＜解＞

原点を O とする．H は A，B を通る直線上にあるから，t を実数として

$$\overrightarrow{OH} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

と表される．

よって　　$\overrightarrow{OH} = (1-t)(0,\ -2,\ -3) + t(8,\ 4,\ 7) = (8t,\ 6t-2,\ 10t-3)$

ゆえに　　$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = (8t-3,\ 6t-1,\ 10t-7)$

また　　$\overrightarrow{AB} = (8,\ 6,\ 10)$

条件より，$\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから　　$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

よって　　$8(8t-3) + 6(6t-1) + 10(10t-7) = 0$　　ゆえに　　$t = \frac{1}{2}$

このとき　　$\overrightarrow{OH} = (4,\ 1,\ 2)$　　よって，H の座標は　$(4,\ 1,\ 2)$

また　　$\overrightarrow{PH} = (1,\ 2,\ -2)$

ゆえに　　$\mathrm{PH} = |\overrightarrow{PH}| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$

第 14 問【球面の方程式】

次の球面の方程式を求めよ.
(1)　点 C$(1,\ -3,\ 5)$ を中心とする半径 2 の球面
(2)　原点を中心とし，点 A$(3,\ -6,\ -2)$ を通る球面
(3)　点 A$(2,\ -1,\ 0)$ で xy 平面と接する半径 3 の球面

＜解＞

(1)　$\boxed{(x-1)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-5)^2=2^2}$　　すなわち　$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=4$

(2)　原点を O とすると，この球面の半径は　OA

ここで　$OA^2=3^2+(-6)^2+(-2)^2=49$

よって，球面の方程式は　$x^2+y^2+z^2=49$

(3)　条件から，球面の中心は　$(2,\ -1,\ 3)$　または　$(2,\ -1,\ -3)$

よって，球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9,\quad (x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$$