2次曲線･極座標･極方程式

重要例題集　2 次曲線・極座標・極方程式

第 1 問【楕円の方程式】

次の楕円の長軸の長さ，短軸の長さ，焦点の座標，楕円上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の和を求めよ．また，その概形をかけ．

(1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

＜解＞

(1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から　$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

よって，長軸の長さは　$2\cdot4=8$,　短軸の長さは　$2\cdot3=6$

$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ であるから，焦点の座標は　$(\sqrt{7},\ 0)$, $(-\sqrt{7},\ 0)$

距離の和は　$2\cdot4=8$　楕円の概形は〔図〕

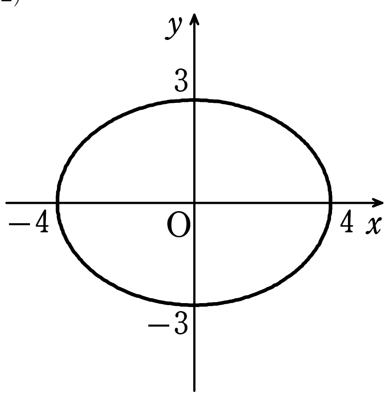
(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ から　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$

よって，長軸の長さは　$2\cdot5=10$,　短軸の長さは　$2\cdot3=6$

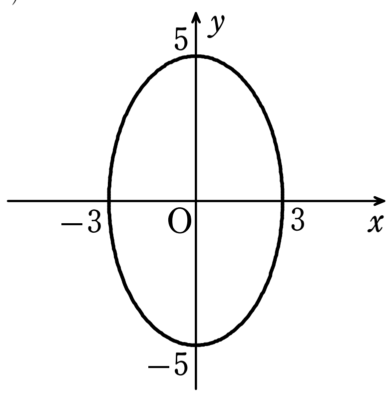
$\sqrt{5^2-3^2}=4$ であるから，焦点の座標は　$(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$

距離の和は　$2\cdot5=10$　楕円の概形は〔図〕

(1)



(2)



第 2 問【楕円の決定】

次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ．ただし，中心は原点で，長軸は x 軸上，短軸は y 軸上にあるものとする．

(1)　長軸の長さが 6，短軸の長さが 4

(2)　2 つの焦点間の距離 6，長軸の長さが 10

(3)　2 点 $\left(2,\ \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，$\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ を通る

＜解＞

中心が原点，長軸が x 軸上にある楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$

とおける．

(1)　長軸の長さが 6，短軸の長さが 4 であるから

$\underline{2a=6,\ 2b=4}$　　ゆえに　　$a=3,\ b=2$

よって，求める楕円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(2)　<u>長軸の長さが 10 であるから　　$2a=10$</u>　　ゆえに　　$a=5$

焦点間の距離が 6 であるから　　$2\sqrt{5^2-b^2}=6$　　ゆえに　　$b^2=16$

よって，求める楕円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(3)　2 点 $\left(2,\ \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，$\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ を通るから

$$\underline{4\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{20}{9}\cdot\frac{1}{b^2}=1,\quad \frac{27}{4}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1}$$

よって　　$\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4}$　　ゆえに　　$a^2=9,\ b^2=4$

よって，求める楕円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

第 3 問【双曲線の方程式】

次の双曲線の焦点の座標，漸近線の方程式，双曲線上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の差を求めよ．また，その概形をかけ．

(1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　　　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$

＜解＞

(1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}=1$ から　　$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$

$\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$ であるから，焦点の座標は　　$(\sqrt{29},\ 0)$，$(-\sqrt{29},\ 0)$

漸近線の方程式は　　$\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=0$，$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=0$

すなわち　　$2x-5y=0$，$2x+5y=0$

距離の差は　　$2\cdot5=10$　　　双曲線の概形は〔図〕

(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$ から　　$\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=-1$

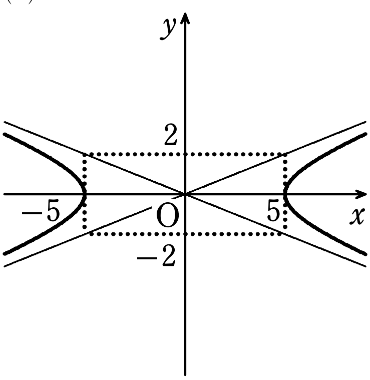
$\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$ であるから，焦点の座標は　　$(0,\ \sqrt{41})$，$(0,\ -\sqrt{41})$

漸近線の方程式は　　$\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=0$，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=0$

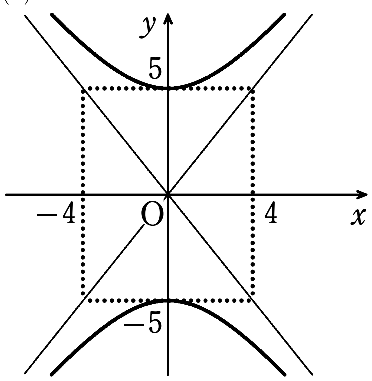
すなわち　　$5x-4y=0$，$5x+4y=0$

距離の差は　　$2\cdot5=10$　　　双曲線の概形は〔図〕

(1)



(2)



第 4 問【双曲線の決定】

楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(2,\ a)$ を通り，この楕円の焦点を焦点とする双曲線の方程式を求めよ．また，a の値と双曲線の漸近線の方程式もいえ．

＜解＞

点 $(2,\ a)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にあるから　$\dfrac{2^2}{8}+\dfrac{a^2}{4}=1$　ゆえに　$a=\pm\sqrt{2}$

また，$\sqrt{8-4}=2$ であるから，楕円の焦点の座標は　$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

この 2 点が求める双曲線の焦点でもある．

よって，双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{s^2}-\dfrac{y^2}{t^2}=1$　$(s>0,\ t>0)$

とおけて，焦点の座標から　$\sqrt{s^2+t^2}=2$　…… ①

また，双曲線が点 $(2,\ \pm\sqrt{2})$ を通るから

$\dfrac{2^2}{s^2}-\dfrac{(\pm\sqrt{2})^2}{t^2}=1$　よって　$4t^2-2s^2=s^2t^2$　…… ②

① から　$t^2=4-s^2$　…… ③

$t^2>0$ であるから　$4-s^2>0$　$s^2>0$ と合わせて　$0<s^2<4$

③ を ② に代入すると　$4(4-s^2)-2s^2=s^2(4-s^2)$

整理して　$s^4-10s^2+16=0$　よって　$(s^2-2)(s^2-8)=0$

$0<s^2<4$ から　$s^2=2$　③ に代入して　$t^2=2$

よって，求める双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$　すなわち　$x^2-y^2=2$

また，漸近線の方程式は　$\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=0$，$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=0$　すなわち　$y=\pm x$

第 5 問【放物線の方程式】

次の放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(1)　$y^2=6x$　　　　(2)　$x^2=6y$

＜解＞

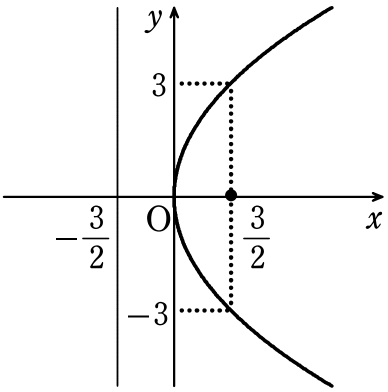
(1)　$y^2=6x$ から　　$y^2=4\cdot\frac{3}{2}x$　　よって，焦点の座標は $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

準線の方程式は　$x=-\frac{3}{2}$　　放物線の概形は〔図〕

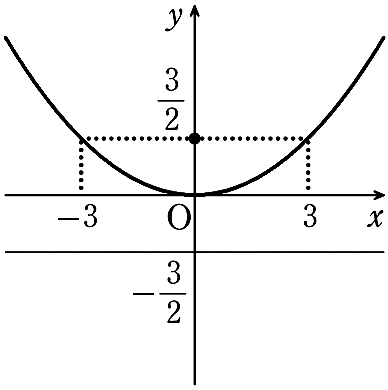
(2)　$x^2=6y$ から　　$x^2=4\cdot\frac{3}{2}y$　　よって，焦点の座標は $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$

準線の方程式は　$y=-\frac{3}{2}$　　放物線の概形は〔図〕

(1)



(2)



第 6 問【放物線の決定】

次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ．

(1)　軸が x 軸，頂点が原点で，点 $(8,\ 4)$ を通る放物線

(2)　頂点が原点で，焦点が x 軸上にあり，点 $(-3,\ 3)$ を通る放物線

＜解＞

(1)　軸が x 軸，頂点が原点であるから，求める放物線の方程式は $y^2=4px$ とおける.

点 $(8,\ 4)$ を通るから　　$4^2=4p\cdot8$　　　ゆえに　　$p=\dfrac{1}{2}$

よって，求める方程式は　　$y^2=2x$

(2)　頂点が原点で，焦点が x 軸上にあるから，求める放物線の方程式は $y^2=4px$ とおける.

点 $(-3,\ 3)$ を通るから　　$3^2=4p\cdot(-3)$　　　ゆえに　　$p=-\dfrac{3}{4}$

よって，求める方程式は　　$y^2=-3x$

第 7 問【2 次曲線の平行移動】

次の曲線の概形をかき，放物線なら頂点の座標，楕円なら中心の座標，双曲線なら漸近線の方程式を求めよ．また，焦点の座標も求めよ．

(1)　$y^2=4x+8$　　　(2)　$x^2+4y^2-4x+8y+4=0$

(3)　$x^2-y^2+4x+6y-6=0$

＜解＞

(1)　$y^2=4x+8$ を変形すると　　$y^2=4(x+2)$　…… ①

曲線 ① は，放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，その概形は〔図〕のようになる.

放物線 $y^2=4x$ の頂点は原点 $(0,\ 0)$，焦点は点 $(1,\ 0)$ である.

よって，放物線 ① の頂点の座標は $(-2,\ 0)$，焦点の座標は $(-1,\ 0)$ である.

(2)　$x^2+4y^2-4x+8y+4=0$ を変形すると　　$(x-2)^2+4(y+1)^2=4$

よって　　$\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$　…… ①

曲線 ① は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，その概形は〔図〕のようになる.

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，焦点は 2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ である.

よって，楕円 ① の中心の座標は $(2,\ -1)$，

焦点の座標は $(2+\sqrt{3},\ -1)$，$(2-\sqrt{3},\ -1)$ である.

(3)　$x^2-y^2+4x+6y-6=0$ を変形すると　　$(x+2)^2-(y-3)^2=1$　…… ①

曲線 ① は，双曲線 $x^2-y^2=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その概形は〔図〕のようになる．

双曲線 $x^2-y^2=1$ の漸近線の方程式は　　$x-y=0$，$x+y=0$

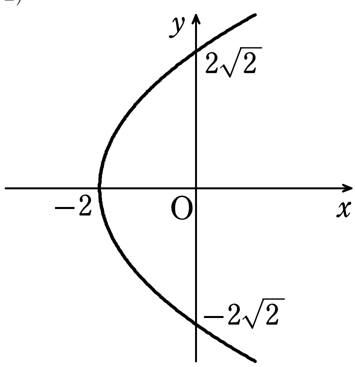
焦点は 2 点 $(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$ である．

よって，双曲線 ① の漸近線の方程式は

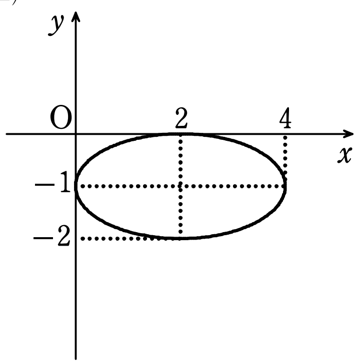
$$(x+2)-(y-3)=0,\ (x+2)+(y-3)=0$$

すなわち　　$x-y+5=0$，$x+y-1=0$

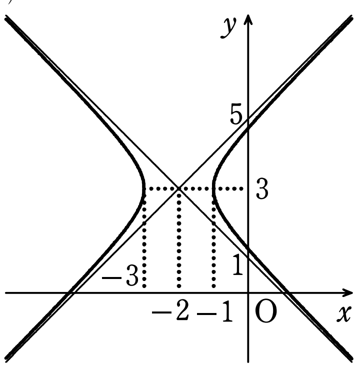
(1)



(2)



(3)



第 8 問【2 次曲線と直線の位置関係】

次の直線と 2 次曲線が，与えられた条件を満たすように，定数 a，m，b の値，またはその範囲を定めよ．(2) においては，その接点の座標も求めよ．

(1)　$y=2x+a$，$x^2-y^2=1$　　　異なる 2 点で交わる

(2)　$y=mx+3$，$4x^2+9y^2=36$　　　接する

(3)　$x+by=2$，$y^2=-8x$　　　共有点をもたない

＜解＞

(1)　$\begin{cases} y=2x+a & \cdots\cdots ① \\ x^2-y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入すると　$x^2-(2x+a)^2=1$

整理すると　$3x^2+4ax+a^2+1=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2a)^2-3(a^2+1)=a^2-3$

① と ② が異なる 2 点で交わるための条件は　$D>0$　すなわち　$a^2-3>0$

よって　$a<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<a$

(2)　$\begin{cases} y=mx+3 & \cdots\cdots ① \\ 4x^2+9y^2=36 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入すると　$4x^2+9(mx+3)^2=36$

整理すると　$(9m^2+4)x^2+54mx+45=0$ ……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(27m)^2-(9m^2+4)\cdot 45=36(9m^2-5)$$

① と ② が接するための条件は　$D=0$　すなわち　$36(9m^2-5)=0$

よって　$m^2=\dfrac{5}{9}$　ゆえに　$m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

接点の x 座標は，③ から　$x=-\dfrac{54m}{2(9m^2+4)}=-\dfrac{27m}{9\cdot\dfrac{5}{9}+4}=-3m$

接点の y 座標は，① から　$y=m\cdot(-3m)+3=-3m^2+3=-3\cdot\dfrac{5}{9}+3=\dfrac{4}{3}$

よって，接点の座標は

$$m=\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ のとき } \left(-\sqrt{5},\ \frac{4}{3}\right),\quad m=-\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ のとき } \left(\sqrt{5},\ \frac{4}{3}\right)$$

(3)　$\begin{cases} x+by=2 & \cdots\cdots ① \\ y^2=-8x & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x=2-by$　……①′

①′ を ② に代入すると　$y^2=-8(2-by)$

整理すると　$y^2-8by+16=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-4b)^2-16=16(b^2-1)$

① と ② が共有点をもたないための条件は　$D<0$　すなわち　$16(b^2-1)<0$

よって　$-1<b<1$

第 9 問【2 次曲線の接線】

次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$ (2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ $\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ $(-2\sqrt{5},\ 1)$ (4) $y^2=4x$ $(1,\ -2)$

＜解＞

(1) 接線の方程式は $\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\,y=1$ よって $2x+3\sqrt{3}\,y=12$

(2) 接線の方程式は $\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\,x+\left(-\dfrac{1}{2}\right)y=1$ よって $\sqrt{3}\,x-2y=4$

(3) 接線の方程式は $\dfrac{1}{16}\cdot(-2\sqrt{5})x-\dfrac{1}{4}\cdot1\cdot y=1$ よって $\sqrt{5}\,x+2y+8=0$

(4) 接線の方程式は $(-2)y=2(x+1)$ よって $x+y+1=0$

第 10 問【楕円に引く接線が直交することを示す】

点 $(3,\ 4)$ から，楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に引いた 2 本の接線は直交することを証明せよ．

＜解＞

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \cdots\cdots ①$$ とする．

点 $(3,\ 4)$ を通る接線は x 軸と垂直でないから $y=m(x-3)+4$ $\cdots\cdots$ ② とおける．

② を ① に代入して整理すると

$$(16m^2+9)x^2-32m(3m-4)x+16(9m^2-24m+7)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=16^2m^2(3m-4)^2-(16m^2+9)\cdot16(9m^2-24m+7)$$

$$=144(7m^2+24m-7)$$

② が ① に接するとき，$D=0$ であるから $7m^2+24m-7=0$

この 2 次方程式の 2 つの解を m_1，m_2 とすると，m_1，m_2 が 2 本の接線の傾きを表す．
また，解と係数の関係から $m_1m_2=-1$

よって，2 本の接線は直交する．

第 11 問【（楕円）図形への応用】

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ に内接し，辺が座標軸に平行な長方形のうち，面積が最大となるような長方形の 2 辺の長さおよび面積を求めよ．

＜解＞

第 1 象限にある頂点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする．

長方形の面積を S とすると　　　$S=2x_1\times 2y_1=4x_1y_1$

また，P は楕円上にあるから　　　$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$　…… ①

$a>0,\ b>0,\ x_1>0,\ y_1>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^2}\cdot\frac{y_1{}^2}{b^2}}\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}\right)$$

① を代入して，両辺に $4ab$ を掛けると　　$4x_1y_1\leqq 2ab$　　　すなわち　$S\leqq 2ab$

等号は $\dfrac{x_1{}^2}{a^2}=\dfrac{y_1{}^2}{b^2}$ のとき成り立つ．

この等式と ① を連立して解くと　　　$x_1=\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ y_1=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$

よって，長方形の 2 辺の長さが $\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{2}\,b$ のとき面積は最大値 $2ab$ をとる．

別解 （媒介変数表示を利用）

長方形の頂点のうち，第 1 象限にあるものは $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける．長方形の面積を S とすると

$$S=2a\cos\theta\cdot 2b\sin\theta=2ab\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2ab\sin 2\theta$$

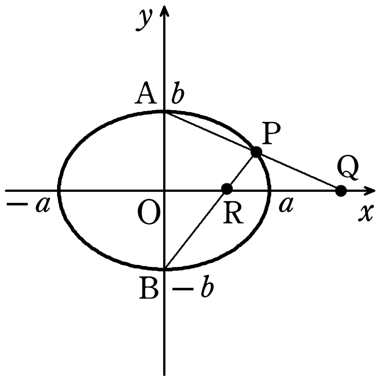
よって，S は $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2ab$ をとる．

このとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ であるから，長方形の 2 辺の長さは $\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{2}\,b$ である．

第 12 問【有名性質１】

楕円上の点 P と短軸の両端を結ぶ直線が長軸またはその延長と交わる 2 点を Q，R とすると，OQ·OR は一定であることを示せ．ただし，O は楕円の中心とする．

＜解＞



O を原点，長軸を x 軸，短軸を y 軸にとり，楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とする．

また，短軸の両端を A$(0,\ b)$，B$(0,\ -b)$ とする．
P の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

Q$(s,\ 0)$，R$(t,\ 0)$，$st\neq 0$ とすると，直線 PA，PB の方程式は　　PA : $\dfrac{x}{s}+\dfrac{y}{b}=1$，PB : $\dfrac{x}{t}-\dfrac{y}{b}=1$

この 2 直線は点 P$(x_0,\ y_0)$ を通るから　　$\dfrac{x_0}{s}+\dfrac{y_0}{b}=1$，$\dfrac{x_0}{t}-\dfrac{y_0}{b}=1$

ゆえに　　$s=\dfrac{bx_0}{b-y_0}$，$t=\dfrac{bx_0}{b+y_0}$

よって　　$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\left|\dfrac{bx_0}{b-y_0}\right|\left|\dfrac{bx_0}{b+y_0}\right|=\left|\dfrac{b^2x_0^2}{b^2-y_0^2}\right|$

① から　　$b^2x_0^2=a^2(b^2-y_0^2)$

ゆえに　　$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\left|\dfrac{a^2(b^2-y_0^2)}{b^2-y_0^2}\right|=a^2$

したがって，OQ·OR は一定である．

第 13 問【有名性質 2】

双曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上の点 P から，2 つの漸近線に垂線 PQ，PR を下ろす．このとき，PQ・PR は一定であることを証明せよ．

＜解＞

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする．

P は双曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上にあるから　　$x_1{}^2-y_1{}^2=a^2$

また，漸近線の方程式は　　$x-y=0,\ x+y=0$

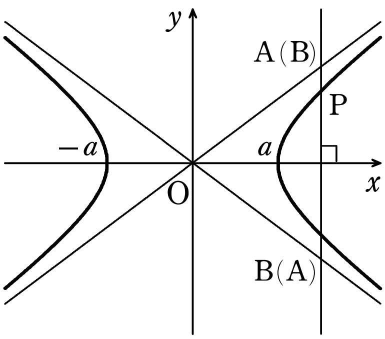
よって　　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{|x_1-y_1|}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{|x_1+y_1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_1{}^2-y_1{}^2|}{2}=\dfrac{|a^2|}{2}=\dfrac{a^2}{2}$　（一定）

第 14 問【有名性質 3】

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上の点 P を通り，2 つの焦点を結ぶ直線に垂直な直線が，この双曲線の漸近線と交わる点を A，B とすると，PA・PB は一定であることを証明せよ．

＜解＞

P $(x_0,\ y_0)$ とすると　　$\dfrac{x_0{}^2}{a^2}-\dfrac{y_0{}^2}{b^2}=1$　…… ①



点 P を通り，2 つの焦点を結ぶ直線（x 軸）に垂直な直線の方程式は　　$x=x_0$

また，双曲線の漸近線の方程式は

$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$　…… ②，　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$　…… ③

② で $x=x_0$ とすると　　$y=\dfrac{b}{a}x_0$

③ で $x=x_0$ とすると　　$y=-\dfrac{b}{a}x_0$

よって，A，B の座標は　　$\left(x_0,\ \dfrac{b}{a}x_0\right)$，　$\left(x_0,\ -\dfrac{b}{a}x_0\right)$

ゆえに　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\left|\dfrac{b}{a}x_0-y_0\right|\left|-\dfrac{b}{a}x_0-y_0\right|=\left|\dfrac{b^2}{a^2}x_0{}^2-y_0{}^2\right|=|b^2|\left|\dfrac{x_0{}^2}{a^2}-\dfrac{y_0{}^2}{b^2}\right|$

ここで，① から　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=|b^2|\cdot 1=b^2$

したがって，PA・PB は一定である．

第 15 問【極座標を直交座標に直す】

極座標が次のような点の直交座標を求めよ．

(1)　$(5,\ \pi)$　　　　(2)　$\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

＜解＞

求める直交座標を $(x,\ y)$ とする．

(1)　$x=5\cos\pi=5\cdot(-1)=-5,\quad y=5\sin\pi=5\cdot0=0$　　よって　$(-5,\ 0)$

(2)　$x=2\cos\dfrac{2}{3}\pi=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1,\quad y=2\sin\dfrac{2}{3}\pi=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

よって　$(-1,\ \sqrt{3})$

第 16 問【直交座標を極座標に直す】

直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を求めよ．

(1)　$(0,\ 2)$　　(2)　$(\sqrt{3},\ 1)$　　(3)　$(-1,\ -1)$

＜解＞

(1)　$x=0,\ y=2$ であるから　$r=\sqrt{0^2+2^2}=2,$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=0,\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=1$$

これを満たす θ は　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　　よって，極座標は　$\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$x=\sqrt{3},\ y=1$ であるから　$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

これを満たす θ は　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　よって，極座標は　$\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

(3)　$x=-1,\ y=-1$ であるから　$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす θ は　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$　　よって，極座標は　$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$

第 17 問【極方程式を直交座標系の方程式に直す】

次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ．

(1)　$r\sin\theta=-1$　　(2)　$r=-2\sin\theta$　　(3)　$r\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)=2$

(4)　$r\cos^2\theta=\sin\theta$　　(5)　$r^2\sin 2\theta=2$　　(6)　$r^2(4-3\cos^2\theta)=4$

＜解＞

(1)　$r\sin\theta=-1$ に $\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}}$ を代入して　　$y=-1$

(2)　$r=-2\sin\theta$ に $\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}}$ を代入すると　　$r=-2\cdot\frac{y}{r}$　　よって　$r^2=-2y$

これに $r^2=x^2+y^2$ を代入して　　$x^2+y^2=-2y$

(3)　$r\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)=2$ から　　$r\left(\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2$

ゆえに　　$-\frac{1}{2}r\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta=2$

これに $\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}}$, $\boxed{\cos\theta=\frac{x}{r}}$ を代入すると　　$-\frac{1}{2}r\cdot\frac{y}{r}-\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot\frac{x}{r}=2$

よって　　$\sqrt{3}x+y+4=0$

(4)　$r\cos^2\theta=\sin\theta$ に $\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}}$, $\boxed{\cos\theta=\frac{x}{r}}$ を代入すると　　$r\cdot\frac{x^2}{r^2}=\frac{y}{r}$

よって　　$x^2=y$

(5)　$r^2\sin 2\theta=2$ から　　$r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2$　　ゆえに　　$r^2\sin\theta\cos\theta=1$

これに $\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}}$, $\boxed{\cos\theta=\frac{x}{r}}$ を代入すると　　$r^2\cdot\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}=1$

よって　　$xy=1$

(6)　$r^2(4-3\cos^2\theta)=4$ から　　$4r^2-3r^2\cos^2\theta=4$

これに　$r^2=x^2+y^2$, $\boxed{\cos\theta=\frac{x}{r}}$ を代入すると　　$4(x^2+y^2)-3r^2\cdot\frac{x^2}{r^2}=4$

よって　　$x^2+4y^2=4$

第 18 問【極座標での図形への応用】

極座標で表された次の 2 点 P，Q 間の距離を求めよ．また，△OPQ の面積を求めよ．
ただし，O は極とする．

(1)　$\mathrm{P}\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(4,\ \frac{2}{3}\pi\right)$　　　　(2)　$\mathrm{P}\left(4,\ \frac{5}{12}\pi\right)$，$\mathrm{Q}\left(1,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$

＜解＞

(1)　△OPQ に余弦定理を用いると

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\angle\mathrm{POQ}$$

$$= 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 12$$

よって　　$\mathrm{PQ} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

また　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\angle\mathrm{POQ} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$

(2)　点 Q の極座標は $\left(1,\ \frac{5}{4}\pi\right)$ とも表される．

△OPQ に余弦定理を用いると

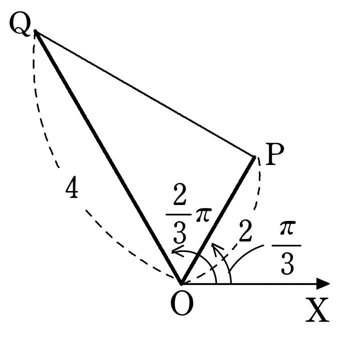
$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\angle\mathrm{POQ}$$

$$= 4^2 + 1^2 - 2\cdot 4\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{12}\pi\right) = 17 + 4\sqrt{3}$$

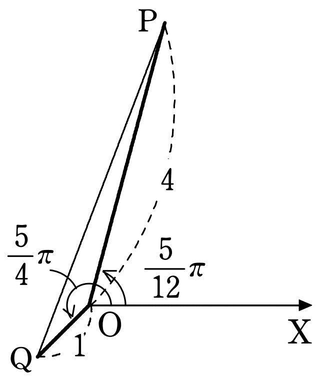
よって　　$\mathrm{PQ} = \sqrt{17 + 4\sqrt{3}}$

また　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\angle\mathrm{POQ} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot\sin\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{12}\pi\right) = 1$

(1)



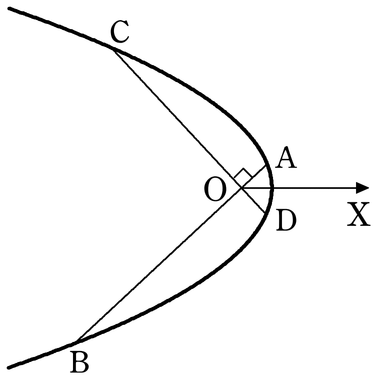
(2)



第 19 問【極方程式で有名性質を示す】

極方程式 $r=\dfrac{3}{1+\cos\theta}$ で表される曲線は，極 O を焦点とする放物線である．この放物線の焦点 O を通り，互いに直交する 2 つの弦を AB，CD とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{\mathrm{CD}}$ の値を求めよ．

＜解＞



$\mathrm{OA}=r_1$，$\mathrm{OB}=r_2$，$\mathrm{OC}=r_3$，$\mathrm{OD}=r_4$ とおき，
点 A の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$ とする．
4 点 A，C，B，D が極 O の周りに並ぶ回転の向きを正とすると，3 点 B，C，D の極座標は

$$\boxed{\mathrm{B}(r_2,\ \theta_1+\pi),\quad \mathrm{C}\left(r_3,\ \theta_1+\frac{\pi}{2}\right),\quad \mathrm{D}\left(r_4,\ \theta_1-\frac{\pi}{2}\right)}$$

とおける．
4 点 A，B，C，D は放物線上にあるから

$$r_1=\frac{3}{1+\cos\theta_1},\quad r_2=\frac{3}{1+\cos(\theta_1+\pi)}=\frac{3}{1-\cos\theta_1}$$

$$r_3=\frac{3}{1+\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{3}{1-\sin\theta_1},\quad r_4=\frac{3}{1+\cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{3}{1+\sin\theta_1}$$

ここで　$\mathrm{AB}=r_1+r_2=\dfrac{3}{1+\cos\theta_1}+\dfrac{3}{1-\cos\theta_1}=\dfrac{6}{1-\cos^2\theta_1}=\dfrac{6}{\sin^2\theta_1}$

$$\mathrm{CD}=r_3+r_4=\frac{3}{1-\sin\theta_1}+\frac{3}{1+\sin\theta_1}=\frac{6}{1-\sin^2\theta_1}=\frac{6}{\cos^2\theta_1}$$

よって　$\dfrac{1}{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\sin^2\theta_1}{6}+\dfrac{\cos^2\theta_1}{6}=\dfrac{1}{6}$