行列

重要例題集　行列

第 1 問【行列の積の定義】

次の行列について，異なる 2 つの積が可能なものをすべて計算せよ．

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

＜解＞

行列 X，Y について，X の列の数と Y の行の数が等しいとき，積 XY が考えられる．
A は 1×2 行列，B は 2×2 行列，C は 2×3 行列，D は 3×2 行列であるから，AB，AC，BC，CD，DB，DC が考えられる．

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}, \qquad AC=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 8\end{pmatrix},$$

$$BC=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -6\\ 5 & -13 & 10\end{pmatrix},$$

$$CD=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 11\\ 19 & 1\end{pmatrix}, \qquad DB=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -8 & 10\\ 3 & -6\end{pmatrix},$$

$$DC=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 16\\ 7 & 0 & 14\\ 3 & 9 & 6\end{pmatrix}$$

第 2 問【行列の積の性質 1】

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ のとき，$(A+B)(A-B)$ を求めよ．

＜解＞

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}$$

よって　$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0+1\cdot1&2\cdot3+1\cdot3\\(-3)\cdot0+3\cdot1&(-3)\cdot3+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\3&0\end{pmatrix}$

注 行列の積の計算では，交換可能かどうかわからないとき，展開公式は使わないようにしよう。

第 3 問【行列の積の性質２】

A，B が 2 次の正方行列で，$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}3&-1\\5&2\end{pmatrix}$ を満たすとき，行列 AB，A^2-B^2 を求めよ．

＜解＞

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}$ ……①，　$A-B=\begin{pmatrix}3&-1\\5&2\end{pmatrix}$ ……②　とおく．

①＋② から　$2A=\begin{pmatrix}4&0\\8&0\end{pmatrix}$　よって　$A=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}$

①－② から　$2B=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&-4\end{pmatrix}$　よって　$B=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$

したがって　$AB=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-4&4\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4&0\\8&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-3\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\5&-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

第 4 問【ハミルトン・ケーリーの定理１】

次の行列 A について，$A^2+pA+qE=O$ を満たす p，q の値を求めよ．

(1)　$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$　　　(2)　$A=\begin{pmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{pmatrix}$

＜解＞

(1)　$A^2+pA+qE=O$ …… ①　とする．

ハミルトン・ケイリーの定理から，A について　$A^2-5A+E=O$　…… ②

が成り立つ．

①−② から　$(p+5)A+(q-1)E=O$

$A\fallingdotseq kE$ (k は実数) であるから　$p+5=q-1=0$　よって　$p=-5$，$q=1$

(2)　$A^2+pA+qE=O$ …… ①　とする．

ハミルトン・ケイリーの定理から，A について　$A^2-A=O$　…… ②

が成り立つ．

①−② から　$(p+1)A+qE=O$

$A\fallingdotseq kE$ (k は実数) であるから　$p+1=q=0$　よって　$p=-1$，$q=0$

第 5 問【ハミルトン・ケーリーの定理２】

行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ が $A^2-A-2E=O$ を満たすとき，$a+d$，$ad-bc$ の値を求めよ．

＜解＞

ハミルトン・ケイリーの定理から　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ …… ①

仮定から　$A^2-A-2E=O$　…… ②

①−② から　$(a+d-1)A=(ad-bc+2)E$　…… ③

[1]　$a+d-1=0$ のとき　③ から　$(ad-bc+2)E=O$

よって　$ad-bc+2=0$　ゆえに　$a+d=1$，$ad-bc=-2$

[2]　$a+d-1\fallingdotseq 0$ のとき　③ から　$A=kE$ (k は実数) とおける．

これを ② に代入すると　$(k^2-k-2)E=O$

よって　$k^2-k-2=0$　これを解いて　$k=-1$，2

$k=-1$ のとき，$A=-E$ であるから　$a+d=-2$，$ad-bc=1$

$k=2$ のとき，$A=2E$ であるから　$a+d=4$，$ad-bc=4$

以上から　$(a+d,\ ad-bc)=(1,\ -2)$，$(-2,\ 1)$，$(4,\ 4)$

第 6 問【逆行列の定義】

次の行列が逆行列をもてば，それを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} a+1 & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$

＜解＞

(1) $\Delta = 3\cdot5-2\cdot7=1 \fallingdotseq 0$　よって，逆行列をもつ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $\Delta = 4\cdot6-8\cdot3=0$　よって，逆行列をもたない．

(3) $\Delta = 3\cdot3-0\cdot0=9 \fallingdotseq 0$　よって，逆行列をもつ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(4) $\Delta = 4\cdot3-(-2)\cdot(-6)=0$　よって，逆行列をもたない．

(5) $\Delta = 7\cdot(-5)-(-4)\cdot9=1 \fallingdotseq 0$　よって，逆行列をもつ．

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

(6) $\Delta = \sin\theta\sin\theta-(-\cos\theta)\cos\theta = \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 \fallingdotseq 0$

よって，逆行列をもつ．

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

(7) $\Delta = (a+1)(1-a)-(-a)\cdot a=1 \fallingdotseq 0$　よって，逆行列をもつ．

$$\begin{pmatrix} a+1 & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$$

第 7 問【逆行列をもたない条件】

$\begin{pmatrix} 2-a & b \\ b & 2+a \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないように，整数 a，b の値を定めよ．

＜解＞

$$\Delta=(2-a)(2+a)-b^2=4-(a^2+b^2)$$

逆行列をもたないのは $\Delta=0$ のときであるから

$$4-(a^2+b^2)=0 \qquad \text{よって} \qquad a^2+b^2=4$$

a，b は整数であるから　　$(a,\ b)=(0,\ \pm 2),\ (\pm 2,\ 0)$

第 8 問【条件を満たす行列を（逆行列を考えて）求める】

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，等式 $AX+B=C$ を満たす行列 X を求めよ．

＜解＞

$AX+B=C$ から　　$AX=C-B$

行列 A について，$\Delta=1\cdot5-2\cdot3=-1\neq0$ であるから，A^{-1} が存在して

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

よって　　$X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -22 & 22 \\ 14 & -13 \end{pmatrix}$$

第 9 問【逆行列と論証】

正方行列について，次のことを証明せよ．
(1)　$A^4=E$ ならば A は逆行列をもつ．
(2)　$A^2=O$ ならば $E-A$ は逆行列をもつ．

＜解＞

(1)　$A^4=E$ から　$AA^3=E,\ A^3A=E$　　よって，A は逆行列 A^3 をもつ．
(2)　$A^2=O$ から

$$(E-A)(E+A)=E^2-A^2=E,\qquad (E+A)(E-A)=E^2-A^2=E$$

よって，$E-A$ は逆行列 $E+A$ をもつ．

第 10 問【行列の n 乗 1 】

n は自然数とする．次の行列 A について，A^n を求めよ．

(1)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$　　(2)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(4)　$A=\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} & 2 \end{pmatrix}$

＜解＞

(1)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\qquad A^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-4)^2 \end{pmatrix},$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-4)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & (-4)^3 \end{pmatrix}$$

などから　$A^n=\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$,

$A^3=A^2A=EA=A$, $A^4=A^3A=AA=A^2=E$

などから，n が奇数のとき $A^n=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

n が偶数のとき $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2+2\cdot 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2+2\cdot 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

などから $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{7}\\ -\sqrt{7} & 2\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{7}\\ -\sqrt{7} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{7}\\ -\sqrt{7} & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{7}\\ \sqrt{7} & -3\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{7}\\ \sqrt{7} & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{7}\\ -\sqrt{7} & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

m は自然数とする． $n=3m-2$ のとき $A^n=\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{7}\\ -\sqrt{7} & 2\end{pmatrix}$,

$n=3m-1$ のとき $A^n=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{7}\\ \sqrt{7} & -3\end{pmatrix}$,

$n=3m$ のとき $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

注意 (1)，(3) の結果は，厳密には数学的帰納法で証明しなければならない。

第 11 問【行列の n 乗 2】

行列 $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A^2，A^3 を求めよ．

(2) $E+A+A^2+\cdots\cdots+A^n$ を求めよ．

＜解＞

(1)　$A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ であるから

$$A^2=AA=\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2)　$E+A+A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$

m は自然数とする．

$n=3m$ のとき

$$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^n$$

$$=\underline{E+(E+A+A^2)(A+A^4+\cdots\cdots+A^{3m-2})}=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$n=3m-1$ のとき

$$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^n$$

$$=\underline{(E+A+A^2)(E+A^3+\cdots\cdots+A^{3m-3})}=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$n=3m-2$ のとき

$$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^n$$

$$=\underline{E+A+(E+A+A^2)(A^2+A^5+\cdots\cdots+A^{3m-4})}=E+A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

$\boxed{注}$ (1) は回転を表す行列の n 乗計算で求めても良い。

第 12 問【行列の n 乗３ （割り算利用）】

(1) $X^n=(X^2-X-2E)Q(X)+aX+bE$ を満たす定数 a, b の値を求めよ．ただし，X は正方行列とする．

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ．

＜解＞

(1) 与式から　$X^n=(X+E)(X-2E)Q(X)+aX+bE$　……①

①に $X=-E$ を代入すると　$(-E)^n=a(-E)+bE$

よって　$\{a-b+(-1)^n\}E=O$

ゆえに　$a-b+(-1)^n=0$　……②

①に $X=2E$ を代入すると　$(2E)^n=a(2E)+bE$

よって　$(2a+b-2^n)E=O$

ゆえに　$2a+b-2^n=0$　……③

したがって，②，③から　$a=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$，$b=\dfrac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$

(2) ハミルトン・ケイリーの定理から　$A^2-A-2E=O$

したがって，(1)の結果から

$$A^n=aA+bE=\frac{2^n-(-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}+\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+2}-(-1)^n & 2^{n+2}-4\cdot(-1)^n \\ -2^n+(-1)^n & -2^n+4\cdot(-1)^n \end{pmatrix}$$

第 13 問【行列の n 乗４ （対角行列利用）】

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=P^{-1}AP$ とする．次の行列を求めよ．

ただし，n は自然数とする．

(1) P^{-1}　(2) B　(3) B^n　(4) A^n

＜解＞

(1)　行列 P について　$\Delta=1\cdot1-2\cdot1=-1$

よって　$P^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

(2)　$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

(3)　$B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$

(4)　$B^n=(P^{-1}AP)^n=P^{-1}APP^{-1}AP\cdots\cdots P^{-1}AP=P^{-1}A^nP$

等式 $B^n=P^{-1}A^nP$ の両辺に，左から P，右から P^{-1} を掛けると　　$PB^nP^{-1}=A^n$

したがって　　$A^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2^{n+1}\\ 1 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & -2^{n+1}+2\\ 2^n-1 & -2^n+2\end{pmatrix}$$

第 14 問【1 次変換を表す行列を求める】

> 1 次変換 f によって点 $(1,0)$ は 点 $(2,1)$ に移り，点 $(-2,3)$ は点 $(8,7)$ に移る．
> このとき，1 次変換 f を表す行列 A を求めよ．

＜解＞

$A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\cdots$①

$A\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 7\end{pmatrix}\cdots$②

①，② より

$A\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 7\end{pmatrix}$

よって

$A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

第 15 問【回転を表す行列】

点 $(2,\sqrt{3})$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を求めよ.

＜解＞

求める点を (x',y') とすると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって，求める点は $(1,3\sqrt{3})$.

第 16 問【１次変換の応用】

平面上の１次変換 f を表す行列を A とする.

(1) １次変換 f によって点Ｐが点Ｑに移り，f によって点Ｑが点Ｒに移るとする．このとき,

$$A^2=kA \quad (k \text{ は実数 かつ } k\fallingdotseq 0,\ k\fallingdotseq 1)$$

をみたすならば3点O，Q，Ｒは同一直線上にあることを示せ.

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とする．直線 $y=5x$ 上のすべての点に対し，１次変換 f によって移される像がその点自身になるとき，実数 b，d の値を求めよ.

＜解＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=kA\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

より，3点O, Q, Rは同一直線上にある.

(2) 直線 $y=5x$ 上の点は実数 t を用いて $(t\,,5t)$ とおける.

直線 $y=5x$ 上のすべての点に対し，１次変換 f によって移される像がその点自身になるとき

$$\boxed{\begin{pmatrix}2 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ 5t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ 5t\end{pmatrix}}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{pmatrix}2t+5bt\\ 5dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ 5t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}(2+5b)t\\ 5dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ 5t\end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

となる.

①はすべての実数 t に対して成り立つので，　(t の恒等式の条件を考えると)

$$\begin{cases}2+5b=1\\ 5d=5\end{cases}$$

$$\therefore\ b=-\frac{1}{5}\ ,\ d=1$$