複素数平面と
その計算

重要例題集　『複素数平面とその計算』

第１問【複素数平面上の点】

$\alpha=3+i$，$\beta=2-2i$ であるとき，次の点を図示せよ．

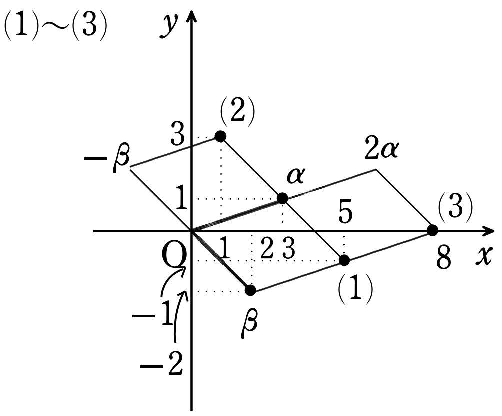
(1)　$\alpha+\beta$　(2)　$\alpha-\beta$　(3)　$2\alpha+\beta$　(4)　$\alpha-2\beta$　(5)　$-2\alpha+\beta$

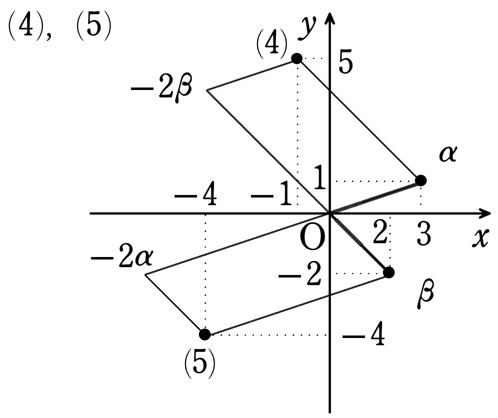
＜解＞

(1)　$\alpha+\beta=5-i$　(2)　$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=1+3i$

(3)　$2\alpha+\beta=8$　ゆえに，［図］　(4)　$\alpha-2\beta=\alpha+(-2\beta)=-1+5i$

(5)　$-2\alpha+\beta=-4-4i$　ゆえに，［図］





第２問【複素数平面上の同一直線上の点】

$\alpha=1+ai$，$\beta=a+4i$，$\gamma=3+bi$ とする．4 点 0，α，β，γ が一直線上にあるとき，実数 a，b の値を求めよ．

＜解＞

0，α，β が一直線上にあるから $\beta=k\alpha$（k は実数）と表される．

よって　$a+4i=k(1+ai)$　すなわち　$a+4i=k+kai$

a，k は実数であるから　$a=k$，$4=ka$

2 式から k を消去して　$4=a^2$　よって　$a=\pm2$

また，0，α，γ が一直線上にあるから $\gamma=l\alpha$（l は実数）……①と表される．

［1］　$a=2$ のとき，①から　$3+bi=l(1+2i)$　すなわち　$3+bi=l+2li$

　　b，l は実数であるから　$3=l$，$b=2l$　よって　$b=6$

［2］　$a=-2$ のとき，①から　$3+bi=l(1-2i)$　すなわち　$3+bi=l-2li$

　　b，l は実数であるから　$3=l$，$b=-2l$　よって　$b=-6$

以上から　$a=2$，$b=6$　または　$a=-2$，$b=-6$

第３問【対称点】

点 1 を通り，実軸に垂直な直線を l とする．直線 l に関して，点 z と対称な点を w とするとき，w を z を用いて表せ．

＜解＞

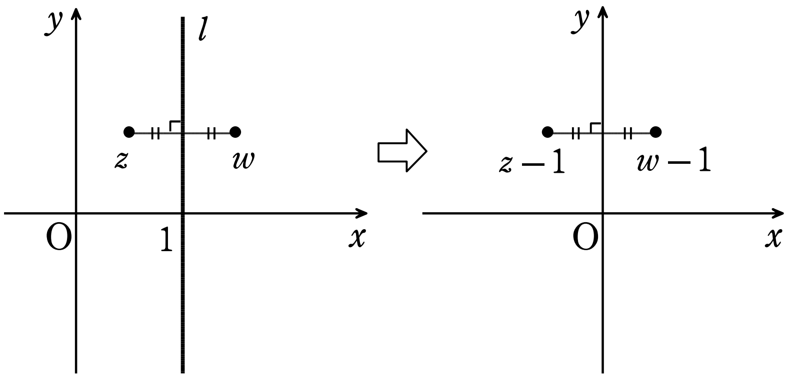
条件から，2 点 $z-1$，$w-1$ は虚軸に関して対称である．

よって　　$w-1=-\overline{(z-1)}$

ゆえに　　$w-1=-\overline{z}+1$

したがって

$$w=-\overline{z}+2$$



第４問【複素数の絶対値】

次の複素数の絶対値を求めよ．

(1)　$-3+4i$　　(2)　$8i$　　(3)　$(1-2i)^2$　　(4)　$\dfrac{2+3i}{5-i}$

＜解＞

(1)　$|-3+4i|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

(2)　$|8i|=\sqrt{8^2}=8$

(3)　$(1-2i)^2=1^2-4i+4i^2=-3-4i$

　よって　　$|(1-2i)^2|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

(4)　$\dfrac{2+3i}{5-i}=\dfrac{(2+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\dfrac{10+(2+15)i+3i^2}{5^2+1^2}=\dfrac{7}{26}+\dfrac{17}{26}i$

　よって　　$\left|\dfrac{2+3i}{5-i}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{7}{26}\right)^2+\left(\dfrac{17}{26}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{338}}{26}=\dfrac{13\sqrt{2}}{26}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

第５問【共役な複素数１】

α，β を 0 でない複素数とするとき，次のことを示せ．

$\overline{\alpha}\beta$ が実数 $\Longleftrightarrow$ $\beta=k\alpha$ を満たす実数 k がある

<解>

条件から　　$\alpha \fallingdotseq 0$，$\overline{\alpha} \fallingdotseq 0$

$\overline{\alpha}\beta$ が実数 $\iff \overline{\overline{\alpha}\beta} = \overline{\alpha}\beta \iff \alpha\overline{\beta} = \overline{\alpha}\beta$

$\iff \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \dfrac{\beta}{\alpha} \iff \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \dfrac{\beta}{\alpha} \iff \dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数

$\iff \dfrac{\beta}{\alpha} = k$ すなわち $\beta = k\alpha$ を満たす実数 k がある．

よって，題意は示された．

第６問【共役な複素数２】

複素数 α，β について，次のことを証明せよ．

(1)　$\alpha\overline{\beta}$ が実数でないとき，$z = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$ は純虚数

(2)　$\alpha\overline{\alpha} = 1$ のとき，$z = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ は実数

<解>

(1)　$\alpha\overline{\beta}$ は実数でないから　　$\overline{\alpha\overline{\beta}} \fallingdotseq \alpha\overline{\beta}$

すなわち　　$\overline{\alpha}\beta \fallingdotseq \alpha\overline{\beta}$

ゆえに　　$z = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta \fallingdotseq 0$

また　　$\overline{z} = \overline{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta} = \overline{\alpha\overline{\beta}} - \overline{\overline{\alpha}\beta} = \overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} = -z$

よって，z は純虚数である．

(2)　$\alpha\overline{\alpha} = 1$ から　　$\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$

よって　　$z = \alpha + \overline{\alpha}$

ゆえに　　$\overline{z} = \overline{\alpha + \overline{\alpha}} = \overline{\alpha} + \alpha = z$

よって，z は実数である．

第６問【共役な複素数と絶対値１】

$|\alpha| = |\beta| = 1$，$\alpha + \beta + 1 = 0$ のとき，$\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ．

＜解＞

$|\alpha|=|\beta|=1$ から　　$|\alpha|^2=|\beta|^2=1$

よって　　$\alpha\overline{\alpha}=1,\ \beta\overline{\beta}=1$　…… ①

$\alpha+\beta+1=0$ から　　$\alpha+\beta=-1$　…… ②

また　$\overline{\alpha+\beta+1}=0$ であるから　　$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=0$　…… ③

① から　　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\quad \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$　　これを ③ に代入して　　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+1=0$

分母を払って整理すると　　$\alpha\beta=-(\alpha+\beta)$

よって，② から　　$\alpha\beta=1$　…… ④

②，④ から　　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot1=-1$

第７問【共役な複素数と絶対値２】

(1)　$|z+1|=2|z-2|$ のとき，$|z-3|$ の値を求めよ．

(2)　$2|z|=3|z-5i|$ のとき，$|z-9i|$ の値を求めよ．

＜解＞

(1)　$|z+1|=2|z-2|$ から　　$|z+1|^2=4|z-2|^2$

すなわち　　$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$

ゆえに　　$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$

整理すると　　$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+5=0$　　よって　　$(z-3)(\overline{z}-3)=4$

したがって　　$|z-3|^2=4$

$|z-3|\geqq 0$ であるから　　$|z-3|=2$

(2)　$2|z|=3|z-5i|$ から　　$4|z|^2=9|z-5i|^2$

すなわち　　$4z\overline{z}=9(z-5i)\overline{(z-5i)}$

ゆえに　　$4z\overline{z}=9(z-5i)(\overline{z}+5i)$

整理すると　　$z\overline{z}+9iz-9i\overline{z}+45=0$　　よって　　$(z-9i)(\overline{z}+9i)=36$

したがって　　$|z-9i|^2=36$

$|z-9i|\geqq 0$ であるから　　$|z-9i|=6$

第８問【極形式１】

次の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ は $0° \leqq \theta < 360°$ とする．

(1)　$-1+i$　(2)　$2-2i$　(3)　$-\sqrt{3}-i$

(4)　$1-\sqrt{3}i$　(5)　-3　(6)　$3i$

＜解＞

絶対値を r とする．

(1)　$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\theta=135°$　よって　$-1+i=\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)$

(2)　$r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$,　$\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\sin\theta=-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\theta=315°$　よって　$2-2i=2\sqrt{2}(\cos 315°+i\sin 315°)$

(3)　$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$,　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\theta=210°$　よって　$-\sqrt{3}-i=2(\cos 210°+i\sin 210°)$

(4)　$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$,　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$\theta=300°$　よって　$1-\sqrt{3}i=2(\cos 300°+i\sin 300°)$

(5)　$r=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$,　$\cos\theta=-\dfrac{3}{3}=-1$,　$\sin\theta=\dfrac{0}{3}=0$

ゆえに　$\theta=180°$　よって　$-3=3(\cos 180°+i\sin 180°)$

(6)　$r=\sqrt{0^2+3^2}=3$,　$\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$,　$\sin\theta=\dfrac{3}{3}=1$

ゆえに　$\theta=90°$　よって　$3i=3(\cos 90°+i\sin 90°)$

第９問【極形式２】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，次の複素数を極形式で表せ．ただし，$r>0$ とする．

(1)　$2z$　(2)　$-3z$　(3)　iz　(4)　$2\overline{z}$　(5)　z^2　(6)　$\dfrac{1}{z}$

＜解＞

(1)　$2z=2r(\cos\theta+i\sin\theta)$

(2)　$-3z=3(\cos180^\circ+i\sin180^\circ)z=3r\{\cos(\theta+180^\circ)+i\sin(\theta+180^\circ)\}$

(3)　$iz=(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)z=r\{\cos(\theta+90^\circ)+i\sin(\theta+90^\circ)\}$

(4)　$2\overline{z}=2r(\cos\theta-i\sin\theta)=2r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

(5)　$z^2=r^2\{\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)\}=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

(6)　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos0^\circ+i\sin0^\circ}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

第 10 問【積と商１】

複素数 $z=\sqrt{3}+i$ と次のような複素数 α について，積 $z\alpha$，商 $\dfrac{z}{\alpha}$ を複素数平面上に図示せよ．

(1)　$\alpha=2i$　　(2)　$\alpha=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\alpha=-\sqrt{3}-i$　　(4)　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$

＜解＞

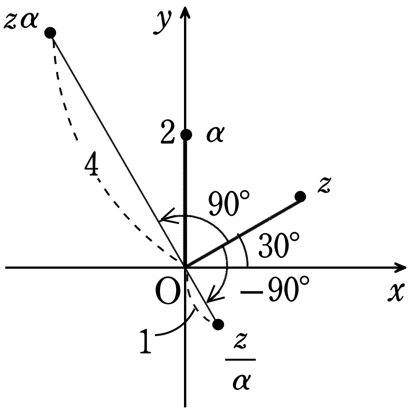
$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ であるから　　$z=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$

(1)　$\alpha=2(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$

よって

$$z\alpha=2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)\cdot2(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$$
$$=4(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$$
$$\frac{z}{\alpha}=\frac{2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)}{2(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)}$$
$$=\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)$$

したがって，右図．



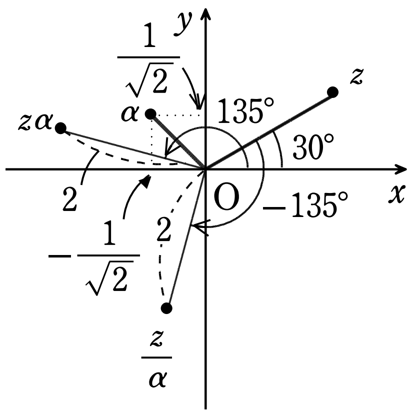
(2)　$|\alpha|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$ であるから

$$\alpha=\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ$$

よって

$$z\alpha=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\cdot(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$$
$$=2(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ)$$
$$\frac{z}{\alpha}=\frac{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}{\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ}$$
$$=2\{\cos(-105^\circ)+i\sin(-105^\circ)\}$$

したがって，右図.



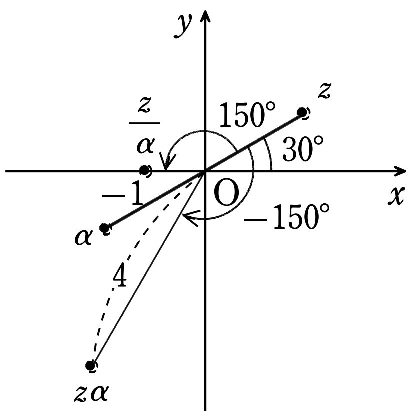
(3)　$|\alpha|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ であるから

$$\alpha=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\{\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)\}$$

よって

$$z\alpha=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$$
$$\times 2\{\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)\}$$
$$=4\{\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)\}$$
$$\frac{z}{\alpha}=\frac{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}{2\{\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)\}}$$
$$=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$$

したがって，右図.



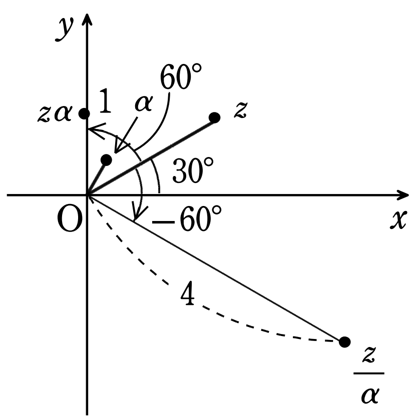
(4)　$|\alpha|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

よって

$$z\alpha=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$
$$=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$$
$$\frac{z}{\alpha}=\frac{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}$$
$$=4\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\}$$

したがって，右図.



第 11 問【回転１】

2 点 $\alpha=2-i$，$\beta=1+3i$ について，次の点を表す複素数を求めよ．

(1)　点 α を，原点を中心として 120° だけ回転した点

(2)　点 β を，点 α を中心として -30° だけ回転した点

＜解＞

(1)　求める複素数を γ とすると

$$\gamma=\alpha(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=(2-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　求める複素数を γ とする．

点 α が原点に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ点 β'，γ' に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha=1+3i-(2-i)=-1+4i,\qquad \gamma'=\gamma-\alpha$$

点 γ' は点 β' を，原点を中心として -30° だけ回転した点であるから

$$\gamma'=\beta'\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\}=(-1+4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{4-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+4\sqrt{3}}{2}i$$

よって　$$\gamma=\gamma'+\alpha=\frac{4-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+4\sqrt{3}}{2}i+(2-i)$$

$$=\frac{8-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+4\sqrt{3}}{2}i$$

第 12 問【回転２】

$\mathrm{A}(1+\sqrt{3}i)$ について，点 $z=4-2\sqrt{3}i$ を直線 OA に関して対称に移動した点を表す複素数を求めよ．ただし，O は原点とする．

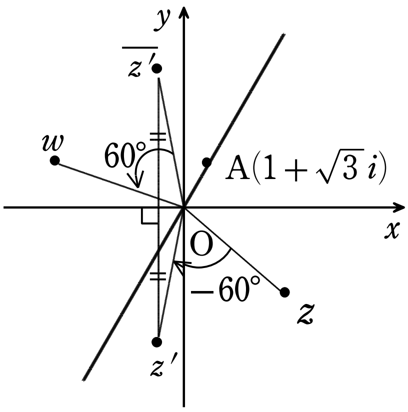
<解>

求める複素数を w とする．

$$1+\sqrt{3}\,i=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

であるから，点 z を原点の周りに -60° だけ回転した点を z' とすると

$$z'=z\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}$$
$$=(4-2\sqrt{3}\,i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-3\sqrt{3}\,i$$



点 z' を実軸に関して対称移動した点を，原点の周りに 60° だけ回転させると，求める点 w が得られる．

点 z' と実軸に関して対称な点は，$\overline{z'}$ で表されるから

$$w=\overline{z'}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=(-1+3\sqrt{3}\,i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-5+\sqrt{3}\,i$$

第 13 問【ド・モアブルの定理１】

次の値を求めよ．

(1) $(1+i)^{12}$　(2) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5}$　(3) $\left(\frac{3-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{8}$　(4) $(-\sqrt{3}+i)^{-4}$

<解>

(1) $(1+i)^{12}=\{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\}^{12}=(\sqrt{2})^{12}(\cos 540^\circ+i\sin 540^\circ)$

$$=64(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=-64$$

(2) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5}=\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}^{-5}=\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(3) $\left(\frac{3-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{8}=[\sqrt{3}\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\}]^{8}$

$$=(\sqrt{3})^{8}\{\cos(-240^\circ)+i\sin(-240^\circ)\}=81(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$
$$=-\frac{81}{2}+\frac{81\sqrt{3}}{2}i$$

(4) $(-\sqrt{3}+i)^{-4}=\{2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)\}^{-4}$

$$=2^{-4}\{\cos(-600^\circ)+i\sin(-600^\circ)\}=\frac{1}{16}(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$
$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i$$

第 14 問【ド・モアブルの定理２】

> n が正の整数のとき，$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n-\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ を簡単にせよ．

＜解＞

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})&=(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)^n-\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}^n\\
&=\cos(45^\circ\times n)+i\sin(45^\circ\times n)-\{\cos(-45^\circ\times n)+i\sin(-45^\circ\times n)\}\\
&=\cos(45^\circ\times n)+i\sin(45^\circ\times n)-\{\cos(45^\circ\times n)-i\sin(45^\circ\times n)\}\\
&=2i\sin(45^\circ\times n)
\end{aligned}
$$

$360^\circ\div 45^\circ=8$ であり，$\sin(45^\circ\times n)$ の値は $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 8$ の順に

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad -1,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0$$

となる．　よって，m を正の整数とするとき

$n=4m$ 　ならば　$2i\cdot 0=0$

$n=8m-1,\ 8m-3$ 　ならば　$2i\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\,i$

$n=8m-2$ 　ならば　$2i\cdot(-1)=-2i$

$n=8m-5,\ 8m-7$ 　ならば　$2i\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,i$

$n=8m-6$ 　ならば　$2i\cdot 1=2i$

第 15 問【ド・モアブルの定理３】

> 複素数 z が，$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ を満たすとき
>
> (1)　z を θ を用いて表せ．
>
> (2)　n を正の整数とするとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ であることを示せ．

<解>

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ の分母を払って整理すると　　$z^2-(2\cos\theta)z+1=0$

これを z について解いて　　$z=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta$

(2)　[1]　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

また　　$\dfrac{1}{z^n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos n\theta-i\sin n\theta$

よって　　$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

[2]　$z=\cos\theta-i\sin\theta$ のとき

$$z^n=(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^n$$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

また　　$\dfrac{1}{z^n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$

よって　　$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

[1], [2] から，題意は示された．

第 16 問【n 乗根 1】

次の方程式を解け．

(1)　$z^3=-i$　　(2)　$z^4=-16$　　(3)　$z^6=-1$　　(4)　$z^4=8(-1+\sqrt{3}i)$

＜解＞

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とおく．

(1)　$-i=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ$

ゆえに，方程式は　$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=1$，　$3\theta=270^\circ+360^\circ\times k$ (k は整数)

よって　$r=1$　　また　$\theta=90^\circ+120^\circ\times k$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ の範囲で考えると　$k=0$，1，2

$k=0$ とすると　$z=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$

$k=1$ とすると　$z=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$

$k=2$ とすると　$z=\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

以上から，方程式の解は　$z=i$，$\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

(2)　$-16=16(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$

ゆえに，方程式は　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$

よって　$r^4=16$，　$4\theta=180^\circ+360^\circ\times k$ (k は整数)

$r>0$ であるから　$r=2$　　また　$\theta=45^\circ+90^\circ\times k$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ の範囲で考えると　$k=0$，1，2，3

$k=0$ とすると　$z=2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=\sqrt{2}(1+i)$

$k=1$ とすると　$z=2(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=-\sqrt{2}(1-i)$

$k=2$ とすると　$z=2(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)=-\sqrt{2}(1+i)$

$k=3$ とすると　$z=2(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)=\sqrt{2}(1-i)$

以上から，方程式の解は　$z=\pm\sqrt{2}(1+i)$，$\pm\sqrt{2}(1-i)$

(3)　$-1=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$

ゆえに，方程式は　$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$

よって　$r^6=1$，　$6\theta=180^\circ+360^\circ\times k$ （k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$

また　$\theta=30^\circ+60^\circ\times k$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ の範囲で考えると　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$k=0$ とすると　$z=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

$k=1$ とすると　$z=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$

$k=2$ とすると　$z=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

$k=3$ とすると　$z=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$

$k=4$ とすると　$z=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ=-i$

$k=5$ とすると　$z=\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

以上から，方程式の解は　$z=\pm i,\ \dfrac{\pm(\sqrt{3}+i)}{2},\ \dfrac{\pm(\sqrt{3}-i)}{2}$

(4)　$8(-1+\sqrt{3}\,i)=16(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$

ゆえに，方程式は　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$

よって　$r^4=16$，　$4\theta=120^\circ+360^\circ\times k$ （k は整数）

$r>0$ であるから　$r=2$　　また　$\theta=30^\circ+90^\circ\times k$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ の範囲で考えると　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$k=0$ とすると　$z=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\sqrt{3}+i$

$k=1$ とすると　$z=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=-1+\sqrt{3}\,i$

$k=2$ とすると　$z=2(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)=-\sqrt{3}-i$

$k=3$ とすると　$z=2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=1-\sqrt{3}\,i$

以上から，方程式の解は　$z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-\sqrt{3}\,i)$

第 17 問【n 乗根 2】

$\omega=\cos\dfrac{360^\circ}{n}+i\sin\dfrac{360^\circ}{n}$ とおくと，$z^n=1$ の解は，$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots\cdots,\ \omega^{n-1}$ で表されることを示せ．ただし，n は正の整数とする．

<解>

$z^n=1$ の解，すなわち 1 の n 乗根は，次のn 個の複素数である.

$$z_k=\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

ここで $$z_k=\left(\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}\right)^k=\omega^k$$

よって，$z^n=1$ の解は $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots\cdots,\ \omega^{n-1}$ で表される.

第 18 問【n 乗根 3】

$\omega=\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $\omega^{19}+\omega^{18}+\cdots\cdots+\omega+1$　　　　(2) $\omega^{19}\omega^{18}\cdot\cdots\cdots\cdot\omega\cdot 1$

<解>

(1) $\omega^{20}=(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)^{20}=\cos(20\times 18^\circ)+i\sin(20\times 18^\circ)$

$=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$

ゆえに　$\omega^{20}-1=0$

よって　$(\omega-1)(\omega^{19}+\omega^{18}+\cdots\cdots+\omega+1)=0$

$\omega\fallingdotseq 1$ であるから　$\omega^{19}+\omega^{18}+\cdots\cdots+\omega+1=0$

(2) $\omega^{19}\omega^{18}\cdot\cdots\cdots\cdot\omega\cdot 1=\omega^{19+18+\cdots\cdots+1}=\omega^{\frac{19(19+1)}{2}}=\omega^{190}$

$\omega^{20}=1$ であるから　$\omega^{190}=\omega^{20\cdot 9+10}=\omega^{10}$

ここで　$\omega^{10}=(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)^{10}=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ=-1$

ゆえに　$\omega^{19}\cdot\omega^{18}\cdot\cdots\cdots\cdot\omega\cdot 1=-1$

第 19 問【応用】

$z^4-(1+\sqrt{3})z^3+(2+\sqrt{3})z^2-(1+\sqrt{3})z+1=0$ について

(1) $z+\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ.

(2) $z+\dfrac{1}{z}$ が有理数のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ (n は正の整数) の値を求めよ.

＜解＞

(1)　$z=0$ は，与えられた等式を満たさない．

そこで，与えられた等式の両辺を z^2 で割ると

$$z^2-(1+\sqrt{3})z+(2+\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

よって　$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{3})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{3}=0$

すなわち　$\left(z+\frac{1}{z}-1\right)\left(z+\frac{1}{z}-\sqrt{3}\right)=0$

ゆえに　$z+\frac{1}{z}=1,\ \sqrt{3}$

(2)　$z+\frac{1}{z}$ が有理数であるとき　$z+\frac{1}{z}=1$

変形すると　$z^2-z+1=0$　　これを解いて　$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

極形式で表すと　$z=\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)$　（複号同順）

ここで，$\theta=\pm 60°$ とおくと

$$\begin{aligned} z^n+\frac{1}{z^n}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}\\ &=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}\\ &=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+\{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\}\\ &=2\cos n\theta=2\cos(\pm 60°\times n)\end{aligned}$$

よって　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(60°\times n)$

m を正の整数とすると

$n=6m$ のとき　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(360°\times m)=2$

$n=6m-1$ のとき　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(360°\times m-60°)=2\cos 60°=1$

$n=6m-2$ のとき　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(360°\times m-120°)=2\cos 120°=-1$

$n=6m-3$ のとき　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(360°\times m-180°)=2\cos 180°=-2$

$n=6m-4$ のとき　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(360°\times m-240°)=2\cos 240°=-1$

$n=6m-5$ のとき　$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(360°\times m-300°)=2\cos 300°=1$

以上から，m を正の整数として，求める式の値は

$n=6m$ のとき　2；

$n=6m-1$，$n=6m-5$ のとき　1；

$n=6m-2$，$n=6m-4$ のとき　-1；

$n=6m-3$ のとき　-2