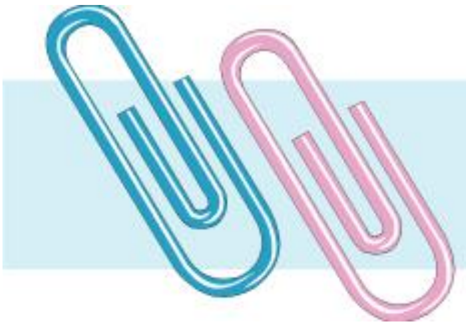
複素数平面と図形



重要例題集　複素数平面と図形

第１問【図形の形をよみとる】

複素数平面上の次の３点 A，B，C について $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさと $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(1)　A(0)，B$(2+i)$，C$(1+3i)$　　　　(2)　A(i)，B$(\sqrt{3}+2i)$，C$(\sqrt{3}+4i)$

＜解＞

(1) $\dfrac{(1+3i)-0}{(2+i)-0}=\dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2+5i-3i^2}{2^2+1^2}$

$=\dfrac{5+5i}{5}=1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$

また　$\mathrm{AB}=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，　$\mathrm{AC}=|1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

ゆえに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\sin 45^\circ=\dfrac{5}{2}$

(2) $\dfrac{(\sqrt{3}+4i)-i}{(\sqrt{3}+2i)-i}=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{3+2\sqrt{3}i-3i^2}{(\sqrt{3})^2+1^2}$

$=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=30^\circ$

また　$\mathrm{AB}=|(\sqrt{3}+2i)-i|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

$\mathrm{AC}=|(\sqrt{3}+4i)-i|=|\sqrt{3}+3i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$

ゆえに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\sin 30^\circ=\sqrt{3}$

第２問【軌跡１】

次の等式を満たす点 z の全体は，どのような図形を描くか．

(1)　$|z-3|=|z-i|$　　　　(2)　$|z+2i|=3$

(3)　$|\overline{z}-i|=1$　　　　(4)　$(z+i)(\overline{z}-i)=1$

＜解＞

(1)　点 3 と点 i から等距離にある点の全体，すなわち 2 点 3，i を結ぶ線分の垂直二等分線

(2)　中心が点 $-2i$，半径が 3 の円

(3)　$|\overline{z}-i|=1$ から　$|\overline{\overline{z}-i}|=1$　　よって　$|z+i|=1$

ゆえに，中心が $-i$，半径が 1 の円を描く．

(4)　$(z+i)(\overline{z}-i)=1$ から　$(z+i)\overline{(z+i)}=1$

よって　$|z+i|^2=1$　　ゆえに　$|z+i|=1$

したがって，中心が点 $-i$，半径が 1 の円を描く．

第 3 問【軌跡 2】

点 z が，原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の等式を満たす点 w はどのような図形を描くか．

(1)　$w=z+i$　　(2)　$w=\dfrac{iz+4}{2}$

＜解＞

点 z は中心 O，半径 1 の円上にあるから　$|z|=1$

(1)　$w=z+i$ から　$z=w-i$　　よって　$|w-i|=1$

ゆえに，中心が点 i，半径が 1 の円を描く．

(2)　$w=\dfrac{iz+4}{2}$ から　$z=\dfrac{2w-4}{i}$　　よって　$\left|\dfrac{2w-4}{i}\right|=1$

すなわち　$2|w-2|=|i|$　　ゆえに　$|w-2|=\dfrac{1}{2}$

したがって，中心が点 2，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を描く．

第 4 問【軌跡 3】

次の等式を満たす点 z の全体は，どのような図形を描くか.

(1)　$z+\overline{z}=2$　　(2)　$z-\overline{z}=2i$

(3)　$z\overline{z}+iz-i\overline{z}=3$　　(4)　$|z+1|=2|z-2|$

＜解＞

(1)　$z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

よって，$z+\overline{z}=2$ から　$(x+yi)+(x-yi)=2$　ゆえに　$x=1$

よって，点 1 を通り実軸に垂直な直線を描く.

別解　与式から　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=1$

また，2 点 z, $\overline{z}$ は実軸に関して対称である.

よって，2 点 z, $\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が常に点 1 であるから，点 z は点 1 を通り実軸に垂直な直線を描く.

(2)　$z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

よって，$z-\overline{z}=2i$ から　$(x+yi)-(x-yi)=2i$

ゆえに　$yi=i$　よって　$y=1$

ゆえに，点 i を通り虚軸に垂直な直線を描く.

別解　与式から　$\dfrac{z+(-\overline{z})}{2}=i$

また，2 点 z, $-\overline{z}$ は虚軸に関して対称である.

よって，2 点 z, $-\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が常に点 i であるから，点 z は点 i を通り，虚軸に垂直な直線を描く.

(3)　$z\overline{z}+iz-i\overline{z}=3$ から　$(z-i)(\overline{z}+i)=4$　よって　$(z-i)\overline{(z-i)}=4$

ゆえに　$|z-i|^2=4$　よって　$|z-i|=2$

したがって，中心が点 i，半径が 2 の円を描く.

(4)　$|z+1|=2|z-2|$ から　$|z+1|^2=4|z-2|^2$

よって　$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-3(z+\overline{z})+5=0$

ゆえに　$(z-3)(\overline{z}-3)=4$　よって　$|z-3|^2=4$　ゆえに　$|z-3|=2$

したがって，中心が点 3，半径が 2 の円を描く.

参考　点 z はアポロニウスの円 (2 点 -1，2 からの距離の比が 2 : 1) 上にあることがわかる.

第５問【軌跡４】

点 z が，原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の点 w はどのような図形を描くか.

(1) $w=\dfrac{1+i}{z}$ (2) $w=\dfrac{z+i}{z+1}$ (3) $w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$

＜解＞

点 z は中心 O，半径 1 の円上にあるから $|z|=1$ …… ①

(1) $w=\dfrac{1+i}{z}$ から $w \fallingdotseq 0$ で $z=\dfrac{1+i}{w}$

よって，① から $\left|\dfrac{1+i}{w}\right|=1$

ゆえに $|1+i|=|w|$ よって $|w|=\sqrt{2}$

したがって，中心が原点，半径が $\sqrt{2}$ の円を描く.

(2) $w=\dfrac{z+i}{z+1}$ から $(z+1)w=z+i$ ゆえに $z(w-1)=-w+i$

$w=1$ は等式を満たさないから $w \fallingdotseq 1$ で $z=\dfrac{-w+i}{w-1}$

よって，① から $\left|\dfrac{-w+i}{w-1}\right|=1$

ゆえに $|-w+i|=|w-1|$ すなわち $|w-i|=|w-1|$

したがって，点 w と 2 点 i，1 との距離が等しいから，点 w は 2 点 i，1 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く.

(3) $w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$ から $(2z-1)w=6z-1$ ゆえに $2z(w-3)=w-1$

$w=3$ は等式を満たさないから $w \fallingdotseq 3$ で $z=\dfrac{w-1}{2(w-3)}$

よって，① から $\left|\dfrac{w-1}{2(w-3)}\right|=1$ ゆえに $|w-1|=2|w-3|$

両辺を平方して $|w-1|^2=4|w-3|^2$

よって $(w-1)(\overline{w}-1)=4(w-3)(\overline{w}-3)$

両辺を展開して整理すると $w\overline{w}-\dfrac{11}{3}(w+\overline{w})+\dfrac{35}{3}=0$

ゆえに $\left(w-\dfrac{11}{3}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{16}{9}$

よって $\left|w-\dfrac{11}{3}\right|^2=\dfrac{16}{9}$ したがって $\left|w-\dfrac{11}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$

よって，中心が点 $\dfrac{11}{3}$，半径が $\dfrac{4}{3}$ の円を描く.

参考 $|w-1|=2|w-3|$ であるから，点 w はアポロニウスの円 (2 点 1，3 からの距離の比が 2 : 1) 上にあることがわかる.

第６問【一直線上・直交】

> 4 点 A$(3+2i)$，B$(6-i)$，C$(c+6i)$，D$(d-4i)$ とする．
> (1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，実数 c の値を定めよ．
> (2)　(1) で求めた c の値に対して，2 直線 BC，BD が垂直に交わるように，実数 d の値を定めよ．

＜解＞

$\alpha=3+2i,\quad \beta=6-i,\quad \gamma=c+6i,\quad \delta=d-4i$　とする．

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数となる．

ここで

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(c+6i)-(3+2i)}{(6-i)-(3+2i)}=\frac{c-3+4i}{3(1-i)}=\frac{(c-3+4i)(1+i)}{3(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{c-3+(c+1)i+4i^2}{3(1^2+1^2)}=\frac{c-7+(c+1)i}{6}$$

これが実数であるから　$c+1=0$　　よって　$c=-1$

(2)　(1) から　$\gamma=-1+6i$

2 直線 BC，BD が垂直に交わるとき，$\dfrac{\delta-\beta}{\gamma-\beta}$ が純虚数となる．

ここで

$$\frac{\delta-\beta}{\gamma-\beta}=\frac{(d-4i)-(6-i)}{(-1+6i)-(6-i)}=\frac{d-6-3i}{7(-1+i)}=\frac{(d-6-3i)(-1-i)}{7(-1+i)(-1-i)}$$

$$=\frac{-d+6+(9-d)i+3i^2}{7\{(-1)^2+1^2\}}=\frac{3-d+(9-d)i}{14}$$

これが純虚数であるから　$3-d=0$　かつ　$9-d\fallingdotseq 0$　　よって　$d=3$

第７問【図形の分析１】

> 複素数平面上の異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) について，次の等式が成り立つとき，三角形 OAB はどのような三角形か．
> (1)　$\alpha^2+\beta^2=0$　　　(2)　$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$

＜解＞

(1)　$\alpha^2+\beta^2=0$ から　　$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=0$　　　よって　　$\alpha=\pm i\beta$

ゆえに　　　$\alpha=\beta(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$　または　$\alpha=\beta\{\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)\}$

したがって，点 A は点 B を，点 O を中心として 90° または -90° だけ回転した点である．よって，三角形 OAB は辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形である．

(2)　B は O と異なるから　　$\beta\neq 0$

ゆえに，$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2\,(\neq 0)$ で割って

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+2=0$$

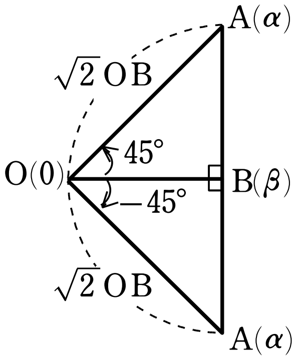
これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について解くと　　$\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm i$

ゆえに　　　$\alpha=\beta(1+i)=\sqrt{2}\,\beta(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

または　　　$\alpha=\beta(1-i)=\sqrt{2}\,\beta\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}$

したがって，$\angle$AOB の大きさは 45° であり，かつ　OA$=\sqrt{2}$OB

したがって，三角形OAB は辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形である．



第８問【図形の分析２】

複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) の間に，次の関係があるとき，この 3 点を頂点とする三角形 ABC は，どのような三角形か．

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}\,i$　　　　　　(2)　$\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$

＜解＞

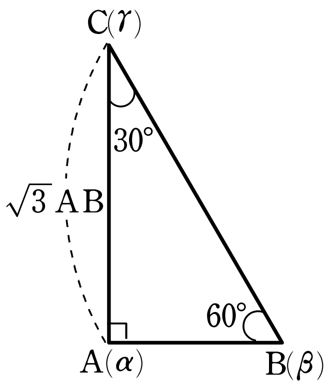
(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}\,i$ から　　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$

よって　　　　$\angle$BAC$=90^\circ$

また，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\sqrt{3}$ であるから　　$|\gamma-\alpha|=\sqrt{3}\,|\beta-\alpha|$

ゆえに　　　AC$=\sqrt{3}$AB

したがって，三角形ABC は $\angle$A$=90^\circ$，$\angle$B$=60^\circ$，$\angle$C$=30^\circ$ の直角三角形である．



(2)　$\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$ から　　$\alpha-\gamma=-i(\beta-\gamma)$

$\beta\neq\gamma$ であるから　　　$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=-i$

ゆえに　　　$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)$　　　よって　$\angle$ACB$=90^\circ$

また，$\left|\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right|=1$ であるから　　$|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$　　　ゆえに　CA$=$CB

したがって，三角形 ABC は点 C を直角の頂点とする直角二等辺三角形である．

第 9 問【図形と証明１】

複素数 α, β, γ, δ を表す点を，それぞれ A，B，C，D とするとき，$\alpha+\gamma=\beta+\delta$，$\delta-\alpha=i(\beta-\alpha)$ ならば，四角形 ABCD は正方形であることを証明せよ．

＜解＞

$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ から　　$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$

よって，四角形 ABCD の対角線 AC，BD の中点が一致する．

ゆえに，四角形 ABCD は平行四辺形である．

また，$\delta-\alpha=i(\beta-\alpha)$，$\alpha \fallingdotseq \beta$ から　　$\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=i$　…… ①

i は純虚数であるから，2 直線 AD，AB は垂直に交わる．

よって　　$\angle \mathrm{BAD}=90^\circ$

更に，① から　　$\left|\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$

ゆえに　　$|\delta-\alpha|=|\beta-\alpha|$　　したがって　　$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}$

以上から，四角形 ABCD は正方形である．

第 10 問【図形と証明２】

複素数平面上の異なる 3 点 O (0)，A (α)，B (β) について，$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$ が成り立つとき，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}$ であることを示せ．

＜解＞

A は O と異なるから　　$\alpha \fallingdotseq 0$

$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$ の両辺を $\alpha\overline{\alpha}$ ($\fallingdotseq 0$) で割ると　　$\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}+\dfrac{\beta}{\alpha}=0$

よって　$\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ が成り立ち，$\dfrac{\beta}{\alpha} \fallingdotseq 0$ であるから，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は純虚数である．

ゆえに，2 直線 OA，OB が垂直に交わる．すなわち　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}$

第 11 問【図形と証明 3】

異なる 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるとき,

$$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$

が成り立つことを証明せよ.

＜解＞

異なる 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるから, $\beta-\alpha\neq 0$ であり, $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数である.

よって $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$ 　すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$

分母を払って $(\gamma-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})=(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)$

ゆえに $(\gamma-\alpha)\overline{\beta}-(\gamma-\alpha)\overline{\alpha}=\overline{\gamma}(\beta-\alpha)-\overline{\alpha}(\beta-\alpha)$

したがって $\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$

第 12 問【図形と証明 4】

単位円上の異なる 3 点 A (α), B (β), C (γ) と, 円上にない点 H (z) について, 等式 $z=\alpha+\beta+\gamma$ が成り立つとき, H は △ABC の垂心であることを示せ.

<解>

点 A(α)，B(β)，C(γ) は単位円上にあるから

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1 \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=\gamma\overline{\gamma}=1$$

ゆえに　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\quad \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta},\quad \overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$

また　$z=\alpha+\beta+\gamma$

$$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC} \iff \frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\ \text{が純虚数} \iff \frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)}=0,\ \frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\neq 0 \ \cdots\cdots ①$$

であるから，① を示す.

$z-\alpha=\beta+\gamma$ であるから

$$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\overline{\gamma-\beta}}{\overline{\beta+\gamma}}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}$$

$$=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\beta}}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta-\gamma}{\gamma+\beta}=0$$

また，A，B，C，H はすべて異なる点であるから　$\dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\neq 0$

よって，① が成り立つから　AH$\perp$BC　　同様にして　BH$\perp$CA

したがって，H は △ABC の垂心である.

第 13 問【応用】

互いに異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に，等式

$$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=8(\beta^3-3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2-\gamma^3)$$

が成り立つとする.

(1)　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ を求めよ.

(2)　点 A(α)，B(β)，C(γ) が同一直線上にないとき，それらを頂点とする三角形はどのような三角形か.

<解>

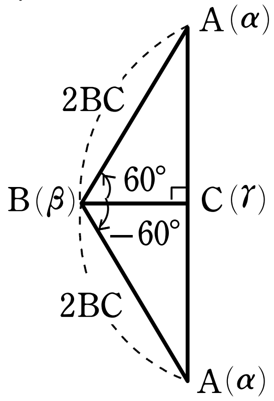
(1)　等式から　　$(\alpha-\beta)^3=-8(\gamma-\beta)^3$　　　$\beta \fallingdotseq \gamma$ であるから　　$\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)^3=-8$

$z=\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ とおくと　　$z^3=-8$　　　ゆえに　　$(z+2)(z^2-2z+4)=0$

これを解いて　　$z=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

よって　　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2)　3 点 A，B，C が同一直線上にないから，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ は実数ではない．



ゆえに　　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=1\pm\sqrt{3}i$

すなわち　　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=2\{\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\}$　(複号同順)

よって，∠ABC の大きさは　60°

また，$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=2$ であるから　　$|\alpha-\beta|=2|\gamma-\beta|$

よって　　$AB=2BC$

ゆえに，△ABC は ∠A＝30°，∠B＝60°，∠C＝90° の直角三角形

第 14 問【反転】

複素数平面上の点 A (1) を通り，実軸に垂直な直線上の点を z とする．$w=\dfrac{1}{z}$ とするとき，点 w はどのような図形上にあるか．

<解>

条件より，z は 2 点 0，2 を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるから

$$|z|=|z-2| \quad \cdots\cdots ①$$

また，$w=\dfrac{1}{z}$ から $w \fallingdotseq 0$ で　　$z=\dfrac{1}{w}$

これを ① に代入して　　$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}-2\right|$　　　よって　　$\dfrac{1}{|w|}=\dfrac{|1-2w|}{|w|}$

ゆえに　　$|2w-1|=1$　　　したがって　　$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，点 w は中心が点 $\dfrac{1}{2}$，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円上にある．ただし，原点を除く．

第 15 問【1 次分数変換】

複素数平面上において，z は原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとする．
$w=\dfrac{z-i}{z-1-i}$ とおくとき
(1)　点 w はどのような図形を描くか．
(2)　$|w|$ の最大値と，そのときの z の値を求めよ．

＜解＞

(1)　$w=\dfrac{z-i}{z-1-i}$ から　　$(z-1-i)w=z-i$

よって　　$(w-1)z=w+(w-1)i$

$w=1$ は等式を満たさないから　　$w\neq 1$

ゆえに　　$z=\dfrac{w}{w-1}+i$　…… ①

$|z|=1$ であるから，$z\overline{z}=1$ に代入して　　$\left(\dfrac{w}{w-1}+i\right)\left(\dfrac{\overline{w}}{\overline{w}-1}-i\right)=1$

ゆえに　　$\{w+i(w-1)\}\{\overline{w}-i(\overline{w}-1)\}=(w-1)(\overline{w}-1)$

よって　　$w\overline{w}+\{\overline{w}(w-1)-w(\overline{w}-1)\}i=0$

ゆえに　　$w\overline{w}+(w-\overline{w})i=0$

よって　　$(w-i)(\overline{w}+i)=1$　すなわち　$(w-i)\overline{(w-i)}=1$

よって，$|w-i|^2=1$ から　　$|w-i|=1$

したがって，点 w の描く図形は，中心が点 i，半径が 1 の円

(2)　絶対値 $|w|$ は原点と点 w との距離であるから，$|w|$ が最大となるのは，2 点 0，w を結ぶ線分が，(1) で得られた円の直径となるときである．

したがって，$w=2i$ のとき最大で，最大値は 2 である．

① に $w=2i$ を代入すると　　$z=\dfrac{2i}{2i-1}+i=\dfrac{2i(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)}+i=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

以上から，$|w|$ は $z=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$ のとき最大値 2 をとる．