積分の計算（2） フローチャート

★ 積分の計算は、“積”の関数よりも、“和（差）”の関数の方が計算しやすい。
“積”の関数⇒“和（差）”の関数に直せるかどうかを考えよう。
（例）部分分数分解・三角関数の積→和

★ うまく変形できないときは【部分積分法】を使おう。

↓

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\left(\begin{array}{l}\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_\beta^\alpha - \int_\beta^\alpha f(x)g'(x)dx \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_\beta^\alpha - \int_\beta^\alpha f'(x)g(x)dx\end{array}\right)$$

必ず $f(x)$，$g(x)$ のうち、どっちかが微分された形で考えること。

★ 対数関数の積分は、基本的に部分積分法で考えてみよう。

（例）

$$\int \log(x+1)\,dx$$

$$= \int (x+1)'\cdot\log(x+1)dx$$

$$= (x+1)\log(x+1) - \int (x+1)\cdot\frac{1}{(x+1)}dx$$

$$= (x+1)\log(x+1) - x + C$$

（例）

$$\int (\log x)^2 dx$$

$$= \int (x)'(\log x)^2 dx$$

$$= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\cdot\frac{1}{x}(\log x)dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C$$

$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$$

★ 部分積分をしていくうちに、同じ積分が現れることがある。代表的なのが
（指数関数×三角関数）
である。

（例）

$$\boxed{\int e^x \sin x\,dx}$$

$$= \int (e^x)'\sin x\,dx$$

$$= e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$$

$$= e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx$$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(-\sin x)dx$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x\sin x\,dx}$$

$$\therefore 2\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

（微分から考える方法もある）

★ 部分積分を使うことで漸化式を立てることがある。代表的なのは n 乗の積分。

（例）

$$I_n = \int_1^2 (\log x)^n\,dx$$

$$= \int_1^2 (x)'(\log x)^n\,dx$$

$$= \left[x(\log x)^n\right]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\cdot n\cdot(\log x)^{n-1}dx$$

$$= 2(\log 2)^n - nI_{n-1}$$

$$(n = 2, 3, \cdots)$$

↓

$$I_1 = \int_1^2 \log x\,dx$$

$$= [x\log x - x]_1^2$$

$$= 2\log 2 - 1$$

$$I_2 = 2(\log 2)^2 - I_1$$

$$= 2(\log 2)^2 - 2\log 2 + 1$$

などがわかるようになる。